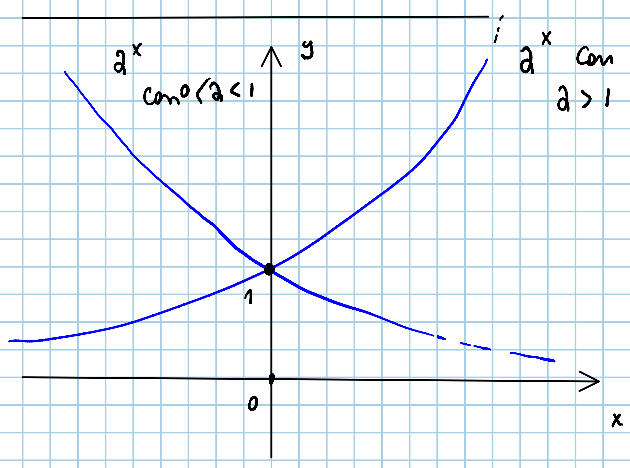
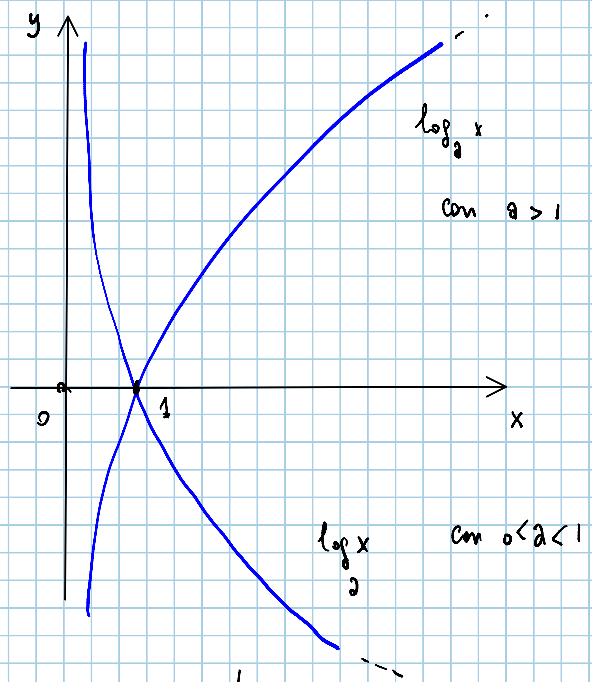
Funzione logaritmo. Fine.





Proprietà dei logaritmi

TEOR Per tutti i valori ammissibili di a, b, x, y, β si hanno:

(1) $a^{\log_a x} = x \quad \forall x>0 \quad$ e $\quad \log_a a^x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(2) $\log_a (x^\beta) = \beta \cdot \log_a x$

(3) $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad$ e $\quad \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

(4) $\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b \quad$ (cambio base nei log.)

Dim. Verifico la (2)

$$\log_a (x^\beta) \overset{?}{\underset{ok}{=}} \beta \cdot \log_a x \iff a^{\log_a (x^\beta)} = a^{\beta \cdot \log_a x} \iff$$

$$\iff x^\beta = \left(a^{\log_a x}\right)^\beta \iff x^\beta = x^\beta$$

proprietà delle potenze

Verifico (3)

$$\log_a (xy) \overset{?}{\underset{ok}{=}} \log_a x + \log_a y \iff a^{\log_a (xy)} = a^{\log_a x + \log_a y}$$

$$\iff xy = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = x \cdot y \quad \text{ok}$$

proprietà potenze

(4)
$$\log_a b \cdot \left(\log_b x\right) \overset{(2)}{=} \log_a\left(b^{\log_b x}\right) = \log_a x \quad \text{ok}$$
$\square$

Convenzione: $\log = \log_e = \ln$

<u>Esercizio</u> Determinare il dominio di
$$f(x) = \log\left(\left(\frac{x}{x-1}\right)^x - 1\right)$$

Devono essere verificate tutte le seg. condizioni

$$\begin{cases} (1) & x \neq 1 \quad \text{perché altrimenti dividi per } 0 \\ (2) & \dfrac{x}{x-1} \geq 0 \\ (3) & x \neq 0 \quad \text{perché altrimenti si ha } 0^0 \text{ non definito} \\ (4) & \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^x - 1 > 0 \end{cases}$$

(2) e (3) sono equiv. a $\dfrac{x}{x-1} > 0$

		0		1	
$N = x$	$- - -$	0	$+ + +$		$+ + +$
$D = x-1$	$- - -$		$- - -$		$+ + +$
$\frac{N}{D}$	$+ + +$		$- - -$		$+ + +$

Dunque
$$\begin{cases} (2) \\ (3) \end{cases} \iff x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$$

Studio (4):
$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^x > 1 \iff \log\left(\frac{x}{x-1}\right)^x > \log 1 = 0$$
$$\iff x \cdot \log\left(\frac{x}{x-1}\right) > 0$$

Studio
$$\log\left(\frac{x}{x-1}\right) > 0 \iff \frac{x}{x-1} > 1 \iff \frac{x}{x-1} - 1 > 0$$
$$\cancel{x} - \cancel{x} + 1$$

$\iff \dfrac{\quad}{x-1} > 0 \iff x - 1 > 0$

$\iff x > 1$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
x	$- - -$	$+ + +$	$+ + +$
$\log\left(\frac{x}{x-1}\right)$	$- - -$	$- - -$	$+ + +$
$x \cdot \log\left(\frac{x}{x-1}\right)$	$+ + +$	$- - -$	$+ + +$

(4) cond. $\iff \quad x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

Conclusione

$$D(f) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$$

LIMITI DI FUNZIONE

Definizione di limite

Dato $x_0 \in \mathbb{R}$ e un $\delta > 0$ definiamo l'intorno di x_0 con raggio δ

$$I_\delta(x_0) = \{ x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta \} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) .$$

Def (P.to di accumulazione) Diciamo che $x_0 \in \mathbb{R}$ è un p.to di accumulazione di un insieme $A \subset \mathbb{R}$

$$A \cap I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset \quad \forall \delta > 0$$

Esempio $A = \{ \frac{1}{n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \}$ ha un unico p.to di accumulazione che è $x_0 = 0 \notin A$.

DEF (Limite) Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un p.to di accumulazione di $A \subset \mathbb{R}$

e sia $f : A \to \mathbb{R}$. Diciamo che f tende al limite $L \in \mathbb{R}$ al tendere di x ad x_0 ("per $x \to x_0$") se:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tale che } |f(x) - L| < \varepsilon \text{ per ogni } x \in A \text{ tale che } 0 < |x - x_0| < \delta .$$

Scriveremo in questo caso

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

o anche $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} L$.

(Permanenza del segno)

<u>Proposizione</u> Supponiamo che esista $\lim_{x \to x_0} f(x) = L > 0$.

Allora esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in D(f) \cap I_\delta(x_0).$$

Prova. Def. di limite

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ |f(x) - L| < \varepsilon \quad \forall x \in D(f), \ 0 < |x - x_0| < \delta$$

ovvero

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \qquad \forall x \text{ come sopra}$$

Con $\varepsilon = L/2$ trovo

$$0 < L/2 = L - L/2 < f(x) \qquad \forall x \in D(f) \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta$$

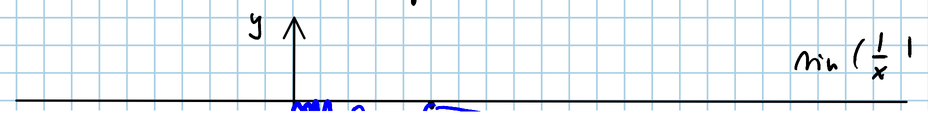
$\square$

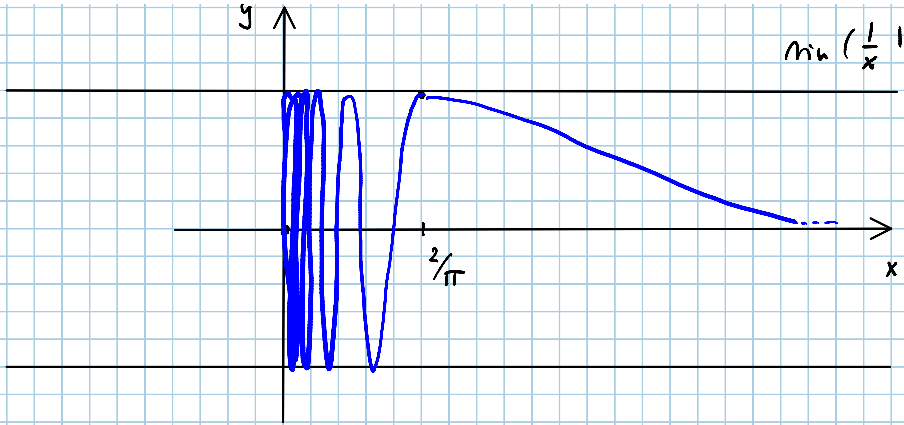
<u>Esempio</u> La funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

<u>NON</u> ha limite per $x \to 0$.

Infatti per $x > 0$ il grafico di f è circa





DEF (Limite infinito) Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un p.to di accumulazione di $A \subset \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione.
Diciamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

($f(x)$ tende a $+$ infinito per $x \to x_0$) se

$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0$ tale che $\quad f(x) \geq M$

"grande" "piccolo"

per ogni $x \in A = D(f)$

tali che $0 < |x - x_0| < \delta$.

Esercizio Usando la definizione verificare che

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty .$$

Soluzione: Fisso $M > 0$ e cerco $\delta > 0$ tale che

$$0 < |x| < \delta \implies f(x) \geq M$$

Voglio che sia vera

Riseq.:

$$f(x) \geq M \iff \frac{1}{x^2} \geq M \iff x^2 \leq \frac{1}{M}$$

$$\iff |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{\frac{1}{M}} = \frac{1}{\sqrt{M}} = \delta$$

Fine perchè con la scelta $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ ho

$$|x| < \delta \implies f(x) \geq M.$$

$$|x| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq M. \qquad \square$$

DEF Sia $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ per qualche $a \in \mathbb{R}$. Diciamo che f tende al limite $L \in \mathbb{R}$ per $x \to \infty$ se:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M \in \mathbb{R} \text{ tale che } \quad x \geq M \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Scriveremo in questo caso

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L,$$

<u>Esercizio</u> Scrivere la definizione per i seguenti limiti:

(1) $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$

(3) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$

(4) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$.

<u>Esercizio</u> Usando la definizione verificare che

$$\lim_{x \to 0} \overbrace{\frac{x+1}{1+2x}}^{= f(x)} = 1$$

Fisso $\varepsilon > 0$ e cerco $\delta > 0$ tale che

$$0 < |x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - 1| < \varepsilon$$

Conti

$$|f(x) - 1| = \left| \frac{x+1}{1+2x} - 1 \right| = \left| \frac{x \cancel{+1} \cancel{-1} - 2x}{1+2x} \right|$$

$$= \frac{|x|}{|1+2x|} < \varepsilon$$

La riscrivo così (è equiv.:)

$$|x| < \varepsilon\, |1+2x| \iff x^2 < \varepsilon^2(1+4x^2+4x)$$

$$\iff x^2(1-4\varepsilon^2) - 4\varepsilon^2 x - \varepsilon^2 < 0$$

Radici della eq. associata:

$$x_\pm = \frac{4\varepsilon^2 \pm \sqrt{16\varepsilon^4 + 4(1-4\varepsilon^2)\varepsilon^2}}{2(1-4\varepsilon^2)}$$

$$= \frac{4\varepsilon^2 \pm \sqrt{4\varepsilon^2}}{2(1-4\varepsilon^2)} = \frac{4\varepsilon^2 \pm 2\varepsilon}{2(1-4\varepsilon^2)}$$

Osserviamo che per $\varepsilon > 0$ piccolo avremo

$$x_- < 0 < x_+ \quad \text{sì}$$

Concludiamo tutte le x tali che $x_- < x < x_+$ verificano la diseq. Quindi posso trovare il $\delta > 0$ ... □

Esercizio Usando la definizione verificare che

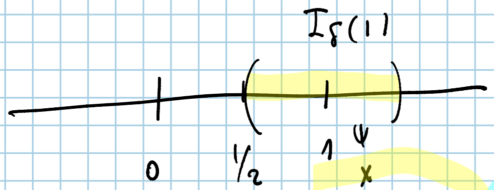
$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{(x-1)^4} = \infty$$

Soluz. Fisso $M > 0$ e cerco $\delta > 0$ tale che

$$|x-1| < \delta \implies f(x) = \boxed{\frac{x}{(x-1)^4} > M}.$$

Se $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$ allora

$$|x-1| \leq \delta \leq \frac{1}{2} \implies x = \underbrace{(x-1)}_{\geq -1/2} + 1 \geq \frac{1}{2}$$



$0 \quad 1/2 \quad 1 \quad x$

Dunque $\quad \dfrac{x}{(x-1)^4} \geq \dfrac{1/2}{(x-1)^4} \geq M$

Risolvo la disuguaglianza semplificata

$$\frac{1/2}{(x-1)^4} \geq M \iff \frac{1}{2M} \geq (x-1)^4$$

$$\iff \frac{1}{\sqrt[4]{2M}} \geq |x-1|$$

Se scelgo $\delta \leq \dfrac{1}{\sqrt[4]{2M}}$ avremo che

$$\left.\begin{array}{l} |x| \leq \delta \\ |x| \leq 1/2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{(x-1)^4} \geq \frac{1/2}{(x-1)^4} \geq M.$$

ok

fine