# Lezione 18

venerdì 7 novembre 2014
10:14

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{2x} + |\sin x|^{x^2}}{\left(2^{x\log x} + e^x\right)^2}$$

$$N(x) = x^{2x}\left(1 + \frac{|\sin x|^{x^2}}{x^{2x}}\right) \quad \text{dove} \quad \boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{|\sin x|^{x^2}}{x^{2x}} = 0 \quad \text{chiaro}}$$

$$D(x) = 2^{2x\log x}\left(1 + \frac{e^x}{2^{x\log x}}\right)^2$$

Affermo che

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{2^{x\log x}}\right) = 0$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{e}{2^{\log x}}\right)^x = 0$$

Deduco per Confronto

definitiv.

$$\text{Ma} \quad 2^{\log x} \to \infty \Rightarrow \frac{e}{2^{\log x}} \to 0 \Rightarrow \frac{e}{2^{\log x}} < \frac{1}{2}$$

Per confronto def.

$$0 < \left(\frac{e}{2^{\log x}}\right)^x \le \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x} \to 0$$

Dunque

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{2x}}{2^{2x\log x}} \cdot \frac{1 + \frac{|\sin x|^{x^2}}{x^{2x}}}{\left(1 + \frac{e^x}{2^{x\log x}}\right)^2}$$

$$\frac{|\sin x|^{x^2}}{x^{2x}} \to 1$$

$$\left( \ldots \, 2^{x \log x} \right) \to 1$$

Ovvero

$$2^{\log x} = 2^{\log\left(2^{\log_2 x}\right)} = 2^{\log_2 x \cdot \log 2} =$$

$$= \left(2^{\log_2 x}\right)^{\log 2} = x^{\log 2}$$

Il limite è

$$L = \lim_{x \to \infty} \frac{x^{2x}}{\left(x^{\log 2}\right)^{2x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^{2x}}{x^{2x \log 2}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} x^{2x - 2x \log 2} = \lim_{x \to \infty} x^{2x \underbrace{(1 - \log 2)}_{> 0}}$$

Ma $1 - \log 2 > 0 \iff \log 2 < 1 = \log e \iff 2 < e$

vero   vero

Posso concludere che $L = +\infty$.

Esercizio Al variare di $\alpha > 0$ calcolare il limite

$$L = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin\sqrt{x} + e^{-1/x}}{x^\alpha}.$$

Soluzione

$$L = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin\sqrt{x}}{x^\alpha} + \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^\alpha}$$

Primo limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin\sqrt{x}}{x^\alpha} = \lim_{y \to 0^+} \frac{\sin y}{y^{2\alpha}} = \lim_{y \to 0^+} \underbrace{\frac{\sin y}{y}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{y^{2\alpha - 1}}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin\sqrt{x}}{x^\alpha} = \lim_{y \to 0^+} \frac{\sin y}{y^{2\alpha}} = \lim_{y \to 0^+} \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{1}{y^{2\alpha-1}}$$

Sost.

$\sqrt{x} = y$

$x = y^2$

$x \to 0^+ \Rightarrow y \to 0^+$

ORA

$$\lim_{y \to 0^+} \frac{1}{y^{2\alpha-1}} = \begin{cases} +\infty & 2\alpha - 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2} \\ 1 & 2\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2} \\ 0 & 2\alpha - 1 < 0 \Leftrightarrow \alpha < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Secondo limite:

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^\alpha} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^\alpha e^{1/x}} \underset{\text{Sost.}}{=} \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)^\alpha e^y} =$$

$\frac{1}{x} = y \quad x = \frac{1}{y}$

$x \to 0^+ \Rightarrow y \to +\infty$

$$= \lim_{y \to \infty} \frac{y^\alpha}{e^y} = 0 \quad \text{FATTO NOTO}$$

$\forall \alpha > 0$

Conclusione $L =$ vedi conti sopra

## ANALISI LOCALE DELLE FUNZIONI. SVILUPPI ASINTOTICI

**DEF** Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un p.to di acc. di $A$ e sia infine $f: A \to \mathbb{R}$.

(1) Diciamo che $f$ è infinitesima per $x \to 0$ se

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 .$$

Scriveremo in questo caso : " $f(x) = o(1)$ per $x \to 0$ "

" $f(x)$ è un o-piccolo di 1 per x che tende a 0 "

(2) Diciamo che $f$ ha ordine di infinitesimo $n \in \mathbb{N}$ per $x \to 0$ se esiste finito e $\neq 0$ il limite

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} \neq 0 \quad \text{finito} .$$

(3) Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Diciamo che $f(x) = o(x^n)$ per $x \to 0$ se

" $f(x)$ è un o piccolo di $x^n$ per $x \to 0$ "

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0 .$$

(4) Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ . Diciamo che $f(x) = o(g(x))$ $x \to 0$ se

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 .$$

## Notazioni - Linguaggio

(1) $o(1)$ per $x \to 0$ è una non meglio precisata funzione che tende a 0 per $x \to 0$.

(2) $o(x^n)$ per $x \to 0$ indica una generica funzione tale che

$$\lim_{x \to 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0$$

tende a 0 più velocemente di $x^n$ .

## Algebra degli "o piccoli"

**TEOREMA** Per ogni $m, n \in \mathbb{N}$ e per $x \to 0$ si ha:

(1) $o(x^n) = x^n \cdot o(1)$

(2) Se $n \leq m$ allora $o(x^n) + o(x^m) = o(x^n)$

(3) Se $n < m$ allora $o(x^n) + x^m = o(x^n)$

(4) $o(x^n) \cdot o(x^m) = o(x^{n+m})$

(5) Regola di sostituzione: se $f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + o(x^n)$ dove $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ allora avremo che

$$f(x^m) = a_1 x^m + a_2 x^{2m} + \dots + a_n x^{n \cdot m} + o(x^{n \cdot m})$$

$g(x) \to 0$ per $x \to 0$ (lecita la sostituzione).

Dim.

(1) Sia $f(x) = o(x^n)$ per $x \to 0$. Questo significa che

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$$

Ovvero

$$\frac{f(x)}{x^n} = o(1) \quad x \to 0, \quad \text{ovvero} \quad f(x) \underset{x \to 0}{=} x^n \cdot o(1)$$

(4) Supponiamo che $f(x) = o(x^n)$ e $g(x) = o(x^m)$ $x \to 0$ ovvero

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x^m} = 0$$

Dunque

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)\, g(x)}{x^{n+m}} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} \cdot \frac{g(x)}{x^m}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x^m} = 0 \cdot 0 = 0$$

Vero: $f(x) \cdot g(x) = o(x^{n+m})$.

Osservazioni: $\underset{\mathbb{R}}{k \neq 0}$

Osservazioni:

$$k \neq 0 \quad \mathbb{R}$$

(1) Non si distingue fra $o(x^n)$, $k\, o(x^n)$ e $o(k x^n)$

$$o(x^n) = k\, o(x^n) = o(k x^n)$$

(2) Se $f(x) = o(o(x^n))$ $x \to 0$ $\Rightarrow$ $f(x) = o(x^n)$ per $x \to 0$

<u>Esercizio</u> Calcolare l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ della funzione

$$f(x) = x \sin(x^2) + \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin^2(x).$$

Soluz.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \iff \frac{\sin x}{x} = 1 + o(1) \quad x \to 0$$

$$\iff \sin x = x(1 + o(1)) = x + x \cdot o(1) = x + o(x)$$

$x \to 0$

Regola di sostituzione

$$\sin(x^2) = x^2 + o(x^2)$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} + o\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} + o(x)$$

Conti:

$$(\sin x)^2 = (x + o(x))^2 = x^2 + o(x)^2 + 2x\, o(x)$$

$$= x^2 + o(x^2) + o(x^2)$$

$$= x^2 + o(x^2)$$

Vado avanti

$$f(x) = x \sin(x^2) + \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin^2(x)$$

$$= x\left(x^2 + o(x^2)\right) + \left(\frac{x}{2} + o(x)\right) \cdot \left(x^2 + o(x^2)\right)$$

$$= \underbrace{x^3} + x\, o(x^2) + \underbrace{\frac{x^3}{2}} + \frac{x}{2} o(x^2) + x^2 o(x) + o(x) o(x^2)$$

$$= x^3 + \frac{x^3}{} + o(x^3) + o(x^3) + o(x^3) + o(x^3)$$

$$= \frac{3}{2}x^3 + o(x^3)$$

Vedo che $f$ ha ordine di infinitesimo 3:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{2}x^3 + \overbrace{o(x^3)}^{= x^3\cdot o(1)}}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^3}\left(\frac{3}{2}+o(1)\right)}{\cancel{x^3}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{2}+o(1)\right) = \frac{3}{2} \neq 0 \text{ finito}$$

$\square$

## CALCOLO DEI LIMITI CON GLI SVILUPPI ELEMENTARI

Tabella degli sviluppi elementari per $x \to 0$

(1) $\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

(2) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$

(3) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

(4) $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

(5) $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$

(6) $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$

(7) $(1+x)^\alpha \underset{\alpha\in\mathbb{R}}{=} 1 + \alpha x + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)x^2 + o(x^2)$

(8) $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$.