Lezione 2

mercoledì 8 ottobre 2014
10:38

<u>Proposizione</u> Dati due numeri complessi $z, w \in \mathbb{C}$ si hanno :

(1) $\overline{z+w} = \bar{z} + \overline{w}$

(2) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \overline{w}$

(3) se $w \neq 0$: $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{w}}$

(4) $\bar{\bar{z}} = z$

Prova : (1) : $z = x + iy \quad w = \xi + i\eta$

$$\overline{z+w} = \overline{x+iy + \xi + i\eta} = \overline{x+\xi + i(y+\eta)}$$

$$= x + \xi - i(y+\eta)$$

$$= x - iy + \xi - i\eta$$

$$= \bar{z} + \overline{w} \, .$$

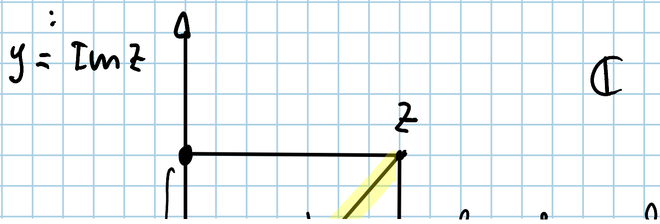
<u>Osservazione</u>

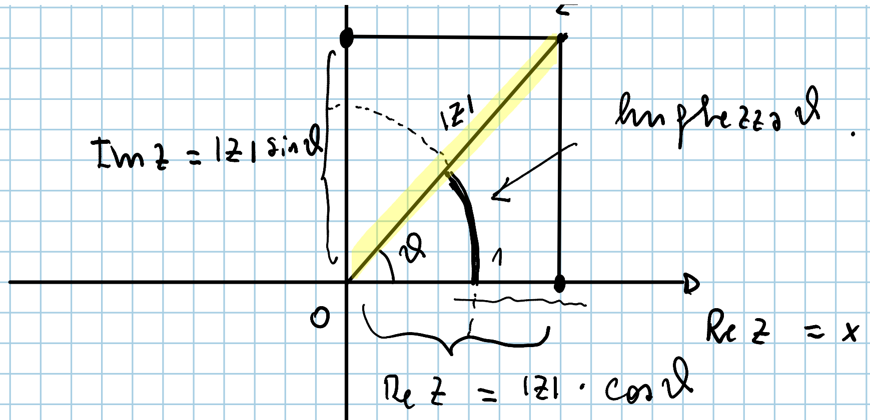
$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

<u>Argomento di z</u>

Sia $\vartheta = \theta \in [0, 2\pi)$ l'angolo espresso in radianti formato dal punto $z \in \mathbb{C}$ a partire dal semiasse positivo delle x in senso antiorario :





L'angolo ϑ identificato da z si dice argomento di z:

$$\vartheta = \arg(z)$$

Dunque troviamo la seguente "rappresentazione trigonometrica" di z

$$z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z = |z| \cos\vartheta + i |z| \sin\vartheta$$
$$= |z| (\cos\vartheta + i \sin\vartheta)$$

con $|z| \geq 0$ modulo di z e
$\vartheta = \arg(z)$ argomento di z, $\vartheta \in [0, 2\pi)$

<u>Calcolo dell'argomento a partire dalla rapp. algebrica di z</u>

Sia $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Sappiamo che

$$x = |z| \cos\vartheta \quad .$$
$$y = |z| \sin\vartheta \quad .$$

Dunque per $x \neq 0$ posso formare

$$\frac{y}{x} = \frac{|z| \sin\theta}{|z| \cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \operatorname{tg}\theta$$

Ora se $y, x > 0$ (z è nel 1° quadrante) posso procedere così:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\theta) \underset{\uparrow}{=} \theta$$

vero se $\theta \in [0, \pi/2)$

Ho trovato la formula:

$$\boxed{\vartheta = \arg(z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{se } z \in 1^\circ \text{ quadrante}}$$

Esercizio:

(1) Se $z = x+iy$ è nel 2° oppure 3° quadrante:

$$\vartheta = \arg(z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$$

(2) Se $z = x+iy$ è nel 4° quadrante

$$\vartheta = \arg(z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi$$

Osservazione Siano $z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ $\quad r = |z| \geq 0$, $\vartheta = \arg(z)$

e $w = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $\quad R = |w| \geq 0$, $\varphi = \arg(w) \in [0, 2\pi)$

due numeri complessi dati in forma trigonometrica. Conto:

$$z \cdot w = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \cdot R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$= rR\,(\cos\vartheta\cos\varphi + i\cos\vartheta\sin\varphi + i\sin\vartheta\cos\varphi - \sin\vartheta\sin\varphi)$$
$$= rR\,(\cos\vartheta\cos\varphi - \sin\vartheta\sin\varphi + i(\cos\vartheta\sin\varphi + \sin\vartheta\cos\varphi))$$

Formule di Addizione per coseno e seno

$$= \underbrace{rR}_{\text{modulo del prodotto}}\,(\cos(\vartheta+\varphi) + i\sin(\vartheta+\varphi))$$

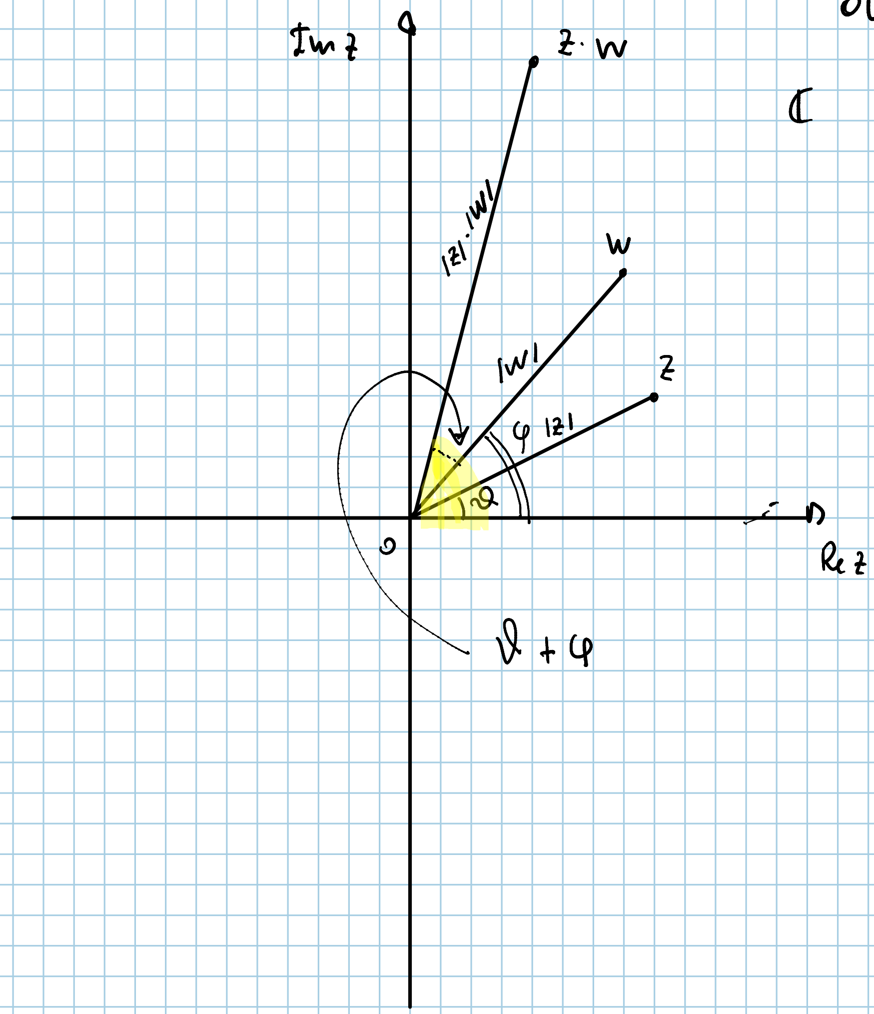
modulo del prodotto

argomento del prodotto.

Conclusioni:

(1) $|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$ prodotto dei moduli

(2) $\arg(z\cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$ somma degli argomenti



Rappresentazione Esponenziale di un numero complesso

Partiamo dalla identità di Eulero:

esponenziale complesso $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, $\quad \theta\in\mathbb{R}$.

Proposizione L'esponenziale complesso verifica le seguenti proprietà:

(1) $|e^{i\theta}| = 1 \quad \forall\theta\in\mathbb{R}$

(2) $e^{i\vartheta} \cdot e^{i\varphi} = e^{i(\vartheta+\varphi)}$ $\quad \forall \vartheta, \varphi$

(3) $\left(e^{i\vartheta}\right)^n = e^{in\vartheta}$ Formula di de Moivre $\quad \forall \vartheta \; \forall n \in \mathbb{N}$

(4) $\overline{e^{i\vartheta}} = e^{-i\vartheta}$ $\quad \forall \vartheta$.

Dim

(1) $|e^{i\theta}| = |\cos\theta + i \sin\theta| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$

(2) Già fatto col la rapp. trig.

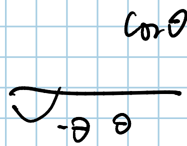
(3) Segue da 2

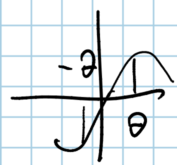
(4) $\overline{(e^{i\theta})} = \overline{\cos\theta + i \sin\theta}$

$= \cos\theta - i \sin\theta$

$= \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$

$= e^{-i\theta}$ ∎





Radici in campo complesso

Sia $w \in \mathbb{C}$ un numero complesso e fissiamo $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 2$. Vogliamo calcolare tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ che risolvono l'equazione

$$z^n = w. \qquad (*)$$

Tali z si dicono le radici complesse n-esime di w.

Metodo Risolutivo.

- Mi scrivo w in forma esponenziale

$$w = R(\cos\varphi + i \sin\varphi) = R e^{i\varphi}$$

Rapp. esponenziale

dove $R = |w| \geq 0$ è il modulo

$$\varphi = \arg(w) \in [0, 2\pi).$$

- Cerchiamo le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'eq. (*) in forma esponenziale, ovvero

$$z = r e^{i\vartheta}$$

con $r = |z| \geq 0$ modulo incognito da det. e $\vartheta = \arg(z) \in [0, 2\pi)$ da determinare.

L'eq. $z^n = w$ diventa:

$$= \left(r e^{i\vartheta}\right)^n = z^n = w = R e^{i\varphi}$$

$$= r^n \left(e^{i\vartheta}\right)^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{formula} \\ \text{di de Moivre}}}{=} r^n \cdot e^{in\theta} = R e^{i\varphi}$$

Quindi otteniamo il sistema di due equazioni reali:

$$\begin{cases} r^n = R \\ n\vartheta = \varphi + 2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \; k \in \mathbb{Z}.$$

Dalla 1^ equazione troviamo r:

$$r = \sqrt[n]{R} \quad \text{Radice reale}$$

Dalla 2^ equazione troviamo gli argomenti $\vartheta_k \in \mathbb{R}$

$$\longrightarrow \quad \vartheta_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k}{n}\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Basterà prendere tutti i $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

per avere tutti gli argomenti.

Dunque le radici n-esime di $w = R e^{i\varphi}$ sono precisamente

$$z_k = \sqrt[n]{R}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k}{n}\pi\right)}$$

con $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Abbiamo trovato n radici complesse distinte.

Commento: le radici z_k si dispongono sui vertici di un poligono regolare con n lati inscritto nella circonferenza con centro 0 e raggio $\sqrt[n]{R}$.

Esempio: Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $z^4 = -1$ (ovvero calc. tutte le radici quarte di $-1 \in \mathbb{C}$).

$$w = -1, \quad |w| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = +1$$