Lezione 20

giovedì 13 novembre 2014
14:03

Criterio del Confronto Asintotico

TEOR Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni numeriche positive $a_n > 0$ e $b_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Supponiamo che esista finito e $\neq 0$ il limite

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq 0 \qquad \text{finito.}$$

Allora:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \text{ converge } \overset{\text{se e solo se}}{\iff} \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \text{ converge}$$

(Criterio del Confronto Asintotico)

Dim. Siccome $L > 0$ allora

$$\frac{L}{2} < L < 2L$$

Dalla Def. di limite segue: esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$ si ha

$$\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < 2L$$

Moltiplico per $b_n > 0$

$$\frac{L}{2}\, b_n < a_n < 2L \cdot b_n \qquad \forall n \geq \bar{n}.$$

Dunque

$$\frac{L}{2} \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} a_n \leq 2L \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} b_n$$

La tesi segue dal Criterio del Confronto. □

Praticamente: Dato una serie $\sum_{n=1} a_n$ con $a_n > 0$

Creo questo rapporto

$$\frac{a_n}{\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha} \qquad \text{con } \alpha > 0 \text{ da determinare}$$

in modo tale che

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha} = \lim_{n\to\infty} n^\alpha a_n \neq 0$$

Esiste finito e $\neq 0$

A questo punto (trovato questo α), avremo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \text{ converge} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty \text{ converge}$$

$$\iff \alpha > 1$$

ES 1 Stabilire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)\left(\log(n+1) - \log n\right)}{\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}} = a_n$$

Sol. Osservo che $a_n > 0$.
Cerco di usare il CdC Asintotico

So che
$$\sin x = x + o(x) \qquad x \to 0$$
Ma $\frac{1}{n} \to 0$ per $n \to \infty$ e quindi posso usare la regola di sostituzione e trovo

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{per } n\to\infty$$

$$= \frac{1}{n}\left(1 + o(1)\right) \qquad \text{per } n \to \infty$$

Poi osservo che

$$\log(n+1) - \log n = \log\frac{n+1}{n} = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Ora ricordo che

$$\log(1+x) = x + o(x) \qquad x \to 0$$

Siccome $\frac{1}{n} \to 0$ per $n \to \infty$ avremo

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(1 + o(1)\right)$$

per $n \to \infty$

Quindi il numeratore

$$N = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(1+o(1)\right) \cdot \frac{1}{n}\left(1+o(1)\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(1+o(1)\right) \qquad n \to \infty$$

Primo il Denom

$$D = \sqrt[4]{1+n} - \sqrt[4]{n}$$

$$= \sqrt[4]{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} - \sqrt[4]{n}$$

$$= \sqrt[4]{n}\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}} - \sqrt[4]{n}$$

$$= \sqrt[4]{n}\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}} - 1\right)$$

Abbiamo

$\alpha \in \mathbb{R}$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)x^2 + o(x^2) \qquad x \to 0$$

In particolare con $\alpha = 1/4$ trovo

$$\sqrt[4]{1+x} = 1 + \frac{1}{4}x + o(x) \qquad x \to 0$$

Dunque

$$\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{4}\,\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad n \to \infty$$

Conclusione

$$D = \sqrt[4]{n}\left(\cancel{1} + \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \cancel{1}\right)$$

$$= n^{1/4}\, n^{-1}\left(\frac{1}{4} + o(1)\right) \qquad n \to \infty$$

$$= n^{-3/4}\left(\frac{1}{4} + o(1)\right) \qquad n \to \infty$$

Dunque

$$a_n = \frac{N}{D} = \frac{\frac{1}{n^2}\left(1+o(1)\right)}{n^{-3/4}\left(\frac{1}{4}+o(1)\right)}$$

$$= \frac{1}{n^2}\cdot n^{3/4}\left(4+o(1)\right) \qquad n\to\infty$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n^{5/4}}}_{= b_n}\left(4+o(1)\right)$$

ORA

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(4+o(1)\right) = 4 \neq 0$$

Per il Crit. Confr. Asintotico

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \iff \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/4}} \text{ converge}$$

MA questa serie converge perché $\frac{5}{4} > 1$.

FATTO NOTO.

$\implies$ La serie data converge. $\square$

ES. 2 Stabilire per quali $\alpha > 0$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\sqrt{n}\left|\sinh\left(\frac{1}{n}\right)-\log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)\right|}_{= a_n}.$$

Sol. Serie a termini positivi. Posso usa CdCA.

Sviluppi:

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \qquad x\to 0$$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \qquad x \to 0$$

$$\sinh\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{6}\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \qquad n \to \infty$$

Poi

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad x \to 0$$

$$\log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right) = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \qquad \frac{1}{n^\alpha} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \quad \alpha > 0$$

ORA

$$a_n = \sqrt{n}\left|\frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right|$$

1° CASO: $\alpha = 1$

$$a_n = \sqrt{n}\left|\frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|$$

$$= \sqrt{n}\left|\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right| = \sqrt{n}\cdot\frac{1}{n^2}\left|\frac{1}{2} + o(1)\right|$$

$$= n^{1/2}\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{2} + o(1)\right) = \frac{1}{n^{3/2}}\left(\frac{1}{2} + o(1)\right)$$

Faccio il Confronto Asintotico con $b_n = \dfrac{1}{n^{3/2}}$ e trovo

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + o(1)\right) = \frac{1}{2} \neq 0$$

Per il CdCA

$$\sum a_n \text{ converge} \iff \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}} < \infty \quad \text{Converge}$$

MA questa Σ converge perché $\frac{3}{2} > 1$

(Serie Armonica. Fatti Noti)

2° CASO: $0 < \alpha < 1$. Avremo in questo caso

$$a_n = \sqrt{n}\left|\frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right|$$

$$= n^{1/2}\frac{1}{n^\alpha}\left(1 + o(1)\right)$$

$$= \frac{1}{n^{\alpha - 1/2}}\left(1 + o(1)\right)$$

Dunque per CdCA

$$\sum a_n < \infty \text{ conv.} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1/2}} < \infty \text{ Converge}$$

$$\iff \alpha - 1/2 > 1 \iff \alpha > \frac{3}{2}$$

Non ci sono
Caso $\emptyset$

Conclusione La serie data diverge a $+\infty$ per tutti $0 < \alpha < 1$.

3° CASO: $\alpha > 1$. In questo caso

$$a_n = \sqrt{n}\left|\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right| = n^{1/2}\frac{1}{n}\left(1 + o(1)\right)$$

$$= \frac{1}{n^{1/2}}\left(1 + o(1)\right)$$

Per il CdCA

$$\sum a_n < \infty \text{ conv.} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} \text{ converge}$$

MA questa serie DIVERGE
perché $\frac{1}{2} < 1$.

FATTO NOTO.

Conclusione

$$\sum a_n \text{ converge } \iff \alpha = 1.$$

$\square$

Forme indeterminate 1^∞

Supponiamo di dover calcolare

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)}$$

con $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 1$ e $g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \infty$.

Abbiamo una FI del tipo

$$[1^\infty].$$

Procedo così:

$$f(x)^{g(x)} = e^{\log f(x)^{g(x)}}$$

$$= e^{g(x) \log f(x)} = e^{[\infty \cdot 0]}$$

$$= e^{\frac{\log(1 + f(x) - 1)}{1/g(x)}}$$

$$= e^{\frac{(f(x)-1)(1+o(1))}{1/g(x)}}$$

$$= e$$

Esempio Calcolare

$$L = \lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x^2} \log(\cos x)} =$$

ORA

$$\log \cos x = \log(1 + \cos x - 1)$$

$\cos x - 1 \to 0$ per $x \to 0$

uso $\log(1+t) = t + o(t)$

$$\log \cos x = \log(1 + \boxed{\cos x - 1})$$

uso $\lg(1+t) = t + o(t)$, $t \to 0$

$$= (\cos x - 1) + o(\cos x - 1)$$
$$= (\cos x - 1)(1 + o(1))$$

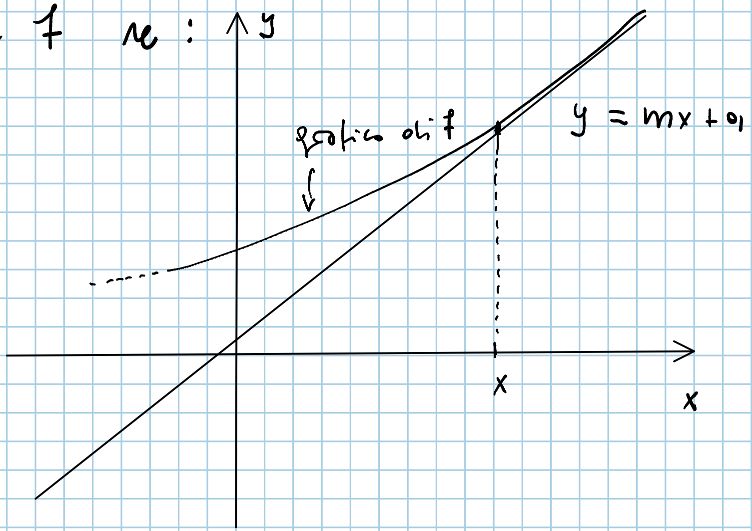
$$L = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}(\cos x - 1)(1+o(1))} = \lim_{x\to 0} e^{\left(-\frac{1}{2}+o(1)\right)}$$

$$= e^{-1/2} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{e}}}\ .$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{\cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \cancel{-1}}{x^2}$$
$$= -\frac{1}{2} + o(1)$$

Asintoti obliqui

DEF Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. La retta di equazione $y = mx + q$ con $m, q \in \mathbb{R}$ si dice asintoto obliquo destro (a $+\infty$) della funzione f se:



$$\lim_{x\to\infty} \left(f(x) - (mx+q) \right) = 0\ .$$

Osservazione I numeri m e q, se esistono, si trovano in questo modo.

Prima cerco $m \in \mathbb{R}$:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

Se $m \in \mathbb{R}$ esiste, cerco $q^{\in \mathbb{R}}$ in questo modo

$$q = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx)$$

Se tale q esiste finito allora la retta di equazione

$$y = mx + q$$

è un asintoto obliquo destro.

ESERCIZIO Calcolare gli asintoti a $\pm\infty$ della funzione

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + x} .$$

ASINTOTO DESTRO

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x + x\sqrt{1 + 1/x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 2$$

Cerco q:

$$q = \lim_{x \to \infty} f(x) - mx = \lim_{x \to \infty} x + \sqrt{x^2 + x} - 2x$$

$$x \to \infty$$

$$= \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - x$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2} + x - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x} + x} = \lim_{x\to\infty}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+1/x} + 1\right)} = \frac{1}{2}$$

Quindi $y = 2x + \frac{1}{2}$ è Asintoto obliquo DX

Poi:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x} + x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\overset{|x| = -x}{\overset{\parallel}{\sqrt{x^2}}}\sqrt{1+1/x} + x}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1 = 0$$

Forse c'è un Asintoto Orizzontale per $x \to -\infty$

$$q = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x} + x$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^2} + x - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x} - x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(-\sqrt{1+1/x} - 1\right)} = -\frac{1}{2}$$

Sì c'è Asint. SX.

$\square$