Lezione 22

lunedì 17 novembre 2014
10:17

ES

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha\cos x + \log(\beta + x^2) & x < 0 \\ \sqrt{x} + \beta x & 0 \leq x \leq 1 \\ x^3 + e^{\alpha x} & x > 1 \end{cases}$$

Continuità

Dobbiamo imporre le seguenti condizioni:

(1) $$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

(2) $$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$$

(1)

$$= \lim_{x \to 0^-} x^2 + \alpha\cos x + \log(\beta + x^2) = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} + \beta x = 0$$

$$= 0 + \alpha \cdot 1 + \log(\beta + 0) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha + \log \beta = 0$$

(2)

$$\beta + 1 = \lim_{x \to 1^-} \sqrt{x} + \beta x = \lim_{x \to 1^+} x^3 + e^{\alpha x} = f(1) = 1 + \beta$$

$$\Updownarrow$$

$$x \to 1^- \qquad\qquad x \to 1^+$$

$$\Updownarrow$$

$$1 + e^{\alpha} = 1 + \beta$$

Si trova il sistema

$$\begin{cases} \alpha + \log \beta = 0 \\ e^{\alpha} = \beta \end{cases} \qquad \begin{cases} \overbrace{\alpha + \log e^{\alpha}}^{=2\alpha} = 0 \\ \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = e^{0} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

Per questi valori di α e β (e solo per questi) la funz. f risulta cont. in tutto $\mathbb{R}$.

$\square$

ES. Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^3 x}{(x^3 + x^2)^{3/2}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Attenzione:

$$\begin{aligned} (x^3 + x^2)^{3/2} &= \left(x^2 (x+1)\right)^{3/2} \\ &= (x^2)^{3/2} \cdot (x+1)^{3/2} \\ &= \left(|x|^2\right)^{3/2} (x+1)^{3/2} \\ &= |x|^3 (x+1)^{3/2} \end{aligned}$$

Il limite è:

$$\lim \frac{\sin^3 x}{\ldots} \qquad \lim (\sin x)^3 \frac{1}{\ldots}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^3 x}{|x|^3 (1+x)^{3/2}} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \frac{1}{(1+x)^{3/2}}$$

$$= 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin^3 x}{|x|^3 (1+x)^{3/2}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin^3 x}{-x^3} \frac{1}{(1+x)^{3/2}}$$

$$= -1$$

I limiti destro e sinistro sono diversi!

Tutto il limite non esiste.

CALCOLO DIFFERENZIALE

Sia $A = (a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $-\infty \le a < b \le \infty$.
e sia $x_0 \in A$ un p.to interno di A.
Vogliamo definire la derivata di una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ nel p.to x_0.

DEF Diciamo che la funzione f è derivabile nel p.to $x_0 \in A$ se esiste finito il limite del rapporto incrementale:

$$\underset{\underset{\mathbb{R}}{\cap}}{f'(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

"derivata di f nel p.to x_0"

Poi diciamo che f è derivabile in A se è derivabile in tutti i punti di A. La funzione

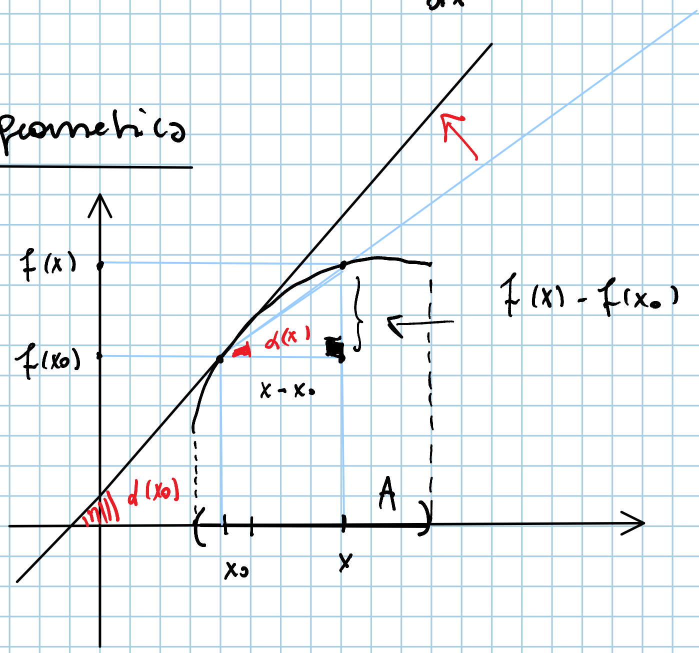
$$A \ni x \longmapsto f'(x) \in \mathbb{R}$$

si chiama "derivata di f".

Notazione Altre notazioni per la derivata sono

$$f'(x) = Df(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

Interpretazione geometrica



$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = tg(\alpha(x)) \quad \text{dove} \quad \alpha(x) = \text{angolo in figura}$$

Dunque

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} tg(\alpha(x))$$

$$= tg(\alpha(x_0))$$

dove $\alpha(x_0)$ sarà l'angolo della retta tangente al grafico della funzione f nel punto $(x_0, f(x_0)) \in gr(f)$

Def Sia f una funzione derivabile nel p.to $x_0 \in A = (a,b)$. La retta di equazione

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \quad x \in \mathbb{R},$$

si dice retta tangente al grafico di f nel p.to $(x_0, f(x_0))$.

<u>Osservazione</u>

$$0 \overset{\text{si}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \text{retta}_{t_{x_0}}(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

<u>Proposizione</u> f derivabile in x_0 $\Rightarrow$ f continua in x_0

$\not\Leftarrow$ MA

Dim. Per ipotesi esiste

$$\mathbb{R} \ni f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Leftrightarrow \boxed{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + o(1)}$$

$o(1) \to 0$ per $x \to x_0$

Dunque

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + (x - x_0) \cdot o(1) \qquad x \to x_0$$

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) + o(x - x_0) \qquad x \to x_0$$

Di conseguenza

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) + o(x - x_0)$$

$$= f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) + 0 = f(x_0)$$

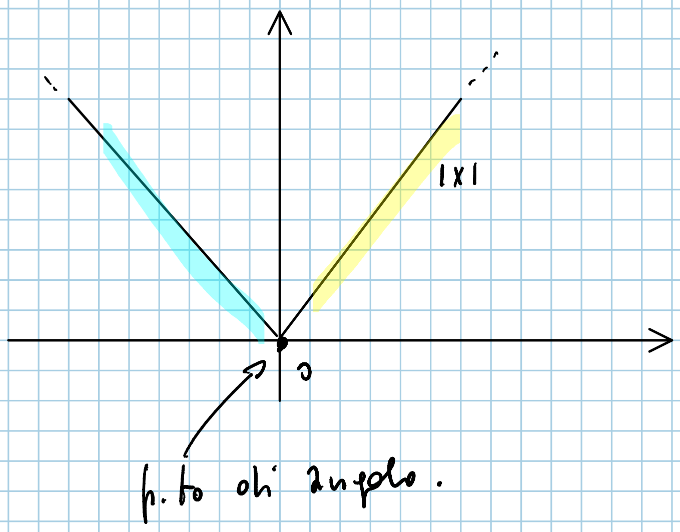
$\square$

<u>Esempio</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ è continua in tutto $\mathbb{R}$ ed in particolare in $x_0 = 0$.

Tuttavia f NON è derivabile in $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to x_0 = 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} \left\langle \begin{array}{l} \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1 \\ \qquad -x \end{array} \right.$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$



Derivate delle funzioni elementari

(1) $f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ costante $\forall x \in \mathbb{R}$, allora $Df(x) = 0$ su $\mathbb{R}$

$$Df(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overset{\overset{0}{\parallel}}{\alpha-\alpha}}{h} = 0$$

(2) Voglio provare che $D x^n = n x^{n-1}$

$$D x^n = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = (*)$$

$$(x+h)^n \overset{BN}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k h^{n-k} = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k h^{\overset{\overset{1}{\wedge}}{n-k}}$$

$$(*) = \lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k h^{n-k-1}$$

$$= \binom{n}{n-1} x^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!\,1!} x^{n-1} = n x^{n-1}$$

(3) $D \sin x = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Dimostrazione

F. Add.

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$$

Dunque

$$D \sin x = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos x \frac{\sin h}{h} + \sin x \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)}$$

$$= \cos x + \sin x \cdot 0 = \cos x$$

(4) $\quad D \cos x = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(5) Sia $a > 0$ una base fissata. Allora

$$D a^x = a^x \cdot \log a \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Rapporto incrementale

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} \qquad \frac{a^h - 1}{h} \to \log a$$

Sostituzione

$$t = \frac{1}{a^h - 1} \iff a^h - 1 = \frac{1}{t} \iff a^h = 1 + \frac{1}{t}$$

$$\iff \log a^h = \log\left(1 + \frac{1}{t}\right)$$

Poi

$$\iff h \cdot \log a = \log\left(1 + \frac{1}{t}\right)$$

$$h \to 0^+ \Rightarrow t \to +\infty$$

($h \to 0^-$ Analogo)

Allora $$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \frac{\log a}{\log\left(1 + \frac{1}{t}\right)} =$$

$$= \log a \cdot \lim_{t \to \infty} \frac{1}{\log\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t}$$

$$= \log a$$

(6) $$D e^x = e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(7) Proviamo che $D \log|x| = \frac{1}{x}, \quad \forall x \neq 0.$

Verifica

$$\lim_{h \to 0} \frac{\log|x+h| - \log|x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\log\left|1 + \frac{h}{x}\right|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) =$$

Sostituzione:

$$t = \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) \Leftrightarrow e^t = 1 + \frac{h}{x}$$

$$\Leftrightarrow e^t - 1 = \frac{h}{x} \Leftrightarrow h = x(e^t - 1)$$

$$h \to 0 \Rightarrow t \to 0$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{x(e^t - 1)} t = \frac{1}{x} \lim_{t \to 0} \frac{1}{\frac{e^t - 1}{t}} = \frac{1}{x}$$

(8) Seno iperbolico : $D \sinh x = \cosh x$

$$D \sinh x = D \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(D e^{x} - D e^{-x} \right)$$
$$= \frac{1}{2} \left(e^{x} + e^{-x} \right) = \cosh x$$

(9) $D \cosh x = \sinh x \quad \forall x$

(10) $D\,|x| = \dfrac{x}{|x|} = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Non esiste per $x = 0$.

$\blacksquare$