Lezione 24

venerdì 21 novembre 2014
10:11

Def (Punto critico) Siano $A \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto ed $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su A. Un p.to $x_0 \in A$ si dice punto critico di f se $f'(x_0) = 0$.

TEOR $A \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto, $x_0 \in A$, sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funz. derivabile nel punto x_0. Se x_0 è un p.to di estremo locale di f allora x_0 è un p.to critico di f, $f'(x_0) = 0$.

Dim. Ad esempio sia $x_0 \in A$ un p.to di minimo locale:

$$\exists \delta > 0 \text{ tale che } f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in I_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A.$$

Allora

$$\left.\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0^+} \frac{\overset{\geq 0}{f(x) - f(x_0)}}{\underset{> 0}{x - x_0}} \geq 0 \\ f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0^-} \frac{\overset{\geq 0}{f(x) - f(x_0)}}{\underset{< 0}{x - x_0}} \leq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

$\square$

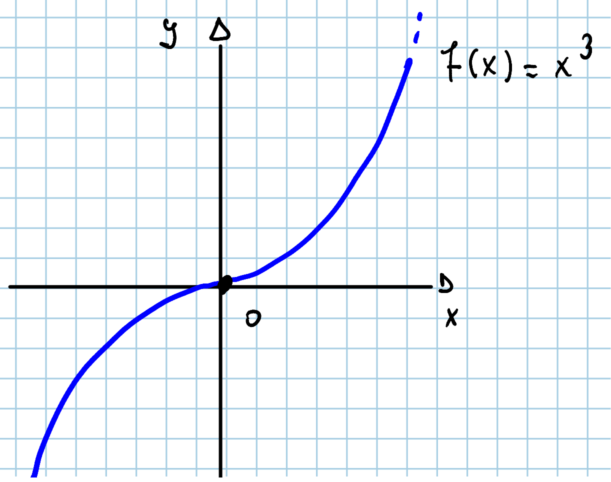
Osservazione x_0 p.to critico di f $\not\Rightarrow$ x_0 p.to di estremo locale

Ad es.: $f(x) = x^3$

È strett. crescente $\Rightarrow$ non ci sono p.ti di estremo

Tuttavia $x = 0$ è un p.to critico

$$f'(x) = 3x^2 = 0 \iff x = 0$$



TEOREMA DI WEIERSTRASS

TEOREMA DI WEIERSTRASS

Oggi vogliamo dimostrare questo teorema:

TEOR. Sia $A = [a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato e sia $f: A = [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in A. Allora esistono $x_0, x_1 \in A$ tali che

$$f(x_0) = \min_{x \in A} f(x),$$

$$f(x_1) = \max_{x \in A} f(x).$$

Ci servono parecchi risultati preliminari

TEOREMA (Bolzano) Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme non vuoto, limitato contenente infiniti punti. Allora A possiede almeno un punto di accumulazione.

Dim. A è limitato $\Rightarrow$ $A \subset [a_1, b_1] \subset \mathbb{R}$ esistono $-\infty < a_1 < b_1 < \infty$ tali che

Sia $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ il punto medio. Notazione $A_1 = [a_1, b_1]$.
Allora almeno uno dei due intervalli

$$[a_1, c_1] \quad e \quad [c_1, b_1]$$

contiene infiniti p.ti di A. Sia ad esempio $[a_1, c_1]$.
Definiamo allora

$$a_2 = a_1 \quad e \quad b_2 = c_1$$

Ovviamente

$$a_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq b_1$$

e inoltre l'intervallo $A_2 = [a_2, b_2]$ ha lunghezza

$$b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1)$$

Ora prendo il p.to medio

$$\frac{a_2 + b_2}{}$$

Ora prendo il p.to medio

$$c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$$

e considero gli intervalli $[a_2, c_2]$ e $[c_2, b_2]$.
In uno dei due ci sono infiniti punti di A.
Ad esempio sia $[c_2, b_2]$. Allora definisco

$$a_3 = c_2 \quad e \quad b_3 = b_2$$

Così:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$$

e

$$\underbrace{b_3 - a_3}_{\text{lunghezza di } A_3 = [a_3, b_3]} = \frac{b_2 - a_2}{2} = \frac{b_1 - a_1}{2^2}$$

Continuo così e trovo intervalli $A_n = [a_n, b_n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ che tutti contengono infiniti p.ti di A. Ed inoltre

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$$

e poi

$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Le succ. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono monotone e limitate quindi esistono

$$L^+ = \lim_{n\to\infty} a_n \qquad L^+, L^- \in \mathbb{R}$$

$$L^- = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Ma

$$L^- - L^+ = \lim_{n\to\infty} b_n - a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x_0 := L^- = L^+$$

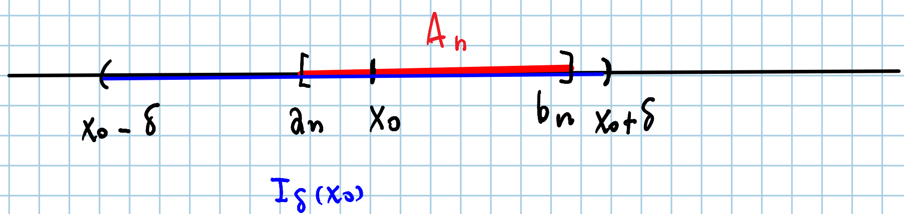
Affermo che $x_0 \in \mathbb{R}$ è un p.to di accumulazione di A.
Cioè $\forall \delta > 0$ devo provare che

$$A \cap I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$$

Fissato questo $\delta > 0$ io scelgo n tale che $b_n - a_n < \delta$
ovvero

$$\frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} < \delta \quad \text{vero per } n \text{ abbastanza grande}$$

$A_n = [a_n, b_n]$
$a_n \leq x_0 \leq b_n$



In tale situazione avremo

$A_n \subset I_\delta(x_0)$ sì!

qui ci sono infiniti punti di A

$\Rightarrow$ $I_\delta(x_0) \cap A \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$.

ci sono dentro infiniti punti

$\square$

Nella dimostrazione abbiamo usato il "metodo di dicotomia".

Sottosuccessioni

Def (Selezione crescente di indici). Una selez. cresc. di indici è una successione $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tale che $n_k \in \mathbb{N}$ e inoltre $n_k < n_{k+1}$.

Def Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione data di numeri reali.
Una successione del tipo
$$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$$
si dice sottosuccessione della succ. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Osservazioni

(1) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al limite L, allora ogni sua sottosuccessione converge pure al limite L.

(2) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha due sottosuccessioni che convergono a limiti diversi allora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ NON ha limite.

TEOREMA (della sottosuccessione convergente) Ogni successione limitata possiede una sottosuccessione convergente.

Dim. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata, allora
$$A = \{a_n \in \mathbb{R} : n\in\mathbb{N}\}$$
è limitato.

1° CASO: A contiene solo finiti numeri.
Quindi esiste un $x\in\mathbb{R}$ tale che $a_n = x$ per infiniti $n\in\mathbb{N}$. Ma allora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possiede una s.s. costante che quindi converge.

2° CASO: A è infinito. Siamo nelle ipotesi del Teorema di Bolzano: quindi A possiede un p.to di accumulazione $x_0 \in\mathbb{R}$.
Quindi
$$A \cap I_{\frac{1}{k}}(x_0) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset \quad \forall k\in\mathbb{N}.$$

Quindi

$$A \cap I_{\frac{1}{k}}(x_0) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Quindi $\forall k \in \mathbb{N}$ esiste un $n_k \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_{n_k} \in I_{1/k}(x_0) \setminus \{x_0\} \quad \text{ovvero} \quad |a_{n_k} - x_0| < \frac{1}{k}$$

Inoltre posso fare la scelta tale che $n_k < n_{k+1}$

Quindi $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ è una sottosuccessione.

ORA

$$\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = x_0 \quad \Leftarrow \quad |a_{n_k} - x_0| < \frac{1}{k}.$$

$\square$

Dimostrazione del Teor. di Weierstrass:

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua IPOTESI

chiuso e limitato

TESI: Voglio provare che esiste $x_0 \in [a,b]$ tale che

$$f(x_0) = \min_{x \in [a,b]} f(x).$$

Certamente esiste

$$L = \inf f([a,b]) = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$$

$$= \inf \{ f(x) \in \mathbb{R} : x \in [a,b] \}$$

Per ora possiamo solo dire che $L \in \mathbb{R}$ oppure $L = -\infty$.

In entrambi i casi, dalla def. di inf segue che esiste una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dentro $[a,b]$ tale che

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L = \inf_{x \in [a,b]} f(x).$$

Siccome $[a,b]$ è limitato allora la successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Siccome $[a,b]$ è limitato allora la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata. Quindi esiste una s.s. $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ che converge. Sia x_0 il suo limite

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$$

Deve essere $x_0 \in [a,b]$ che è chiuso.
Poi

$$L = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \implies L = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})$$

Infine siccome f è cont. nel p.to x_0 :

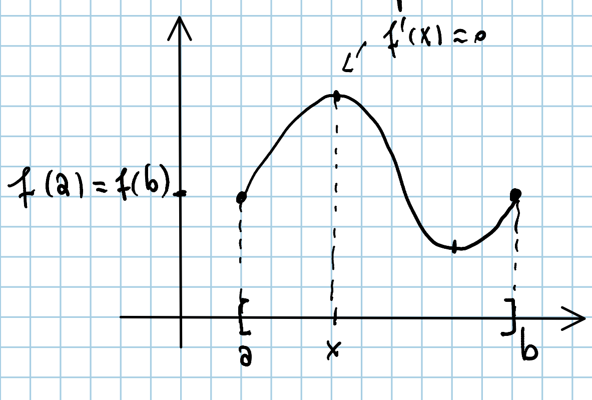
$$= L = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f\left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\right) = f(x_0)$$

$$= \inf_{[a,b]} f$$

Ma allora $f(x_0) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ $\square$

Teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy

TEOR. (Rolle) Sia $[a,b] \subset \mathbb{R}$ con $-\infty < a < b < \infty$ e sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su tutto $[a,b]$ e derivabile in (a,b), tale che $f(a) = f(b)$.
Allora esiste almeno un p.to $x \in (a,b)$ tale che $f'(x) = 0$.



Dim. Per il Teor. di Weierstrass esistono $x_0, x_1 \in [a,b]$ punti di min e di max

$$f(x_0) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$$

$$f(x_1) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

1° CASO $x_0 = a$ e $x_1 = b$ o viceversa.

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \min_{[a,b]} f = \max_{[a,b]} f \Rightarrow f \text{ è costante}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = 0 \ \forall x$$

2° CASO : o x_0 oppure x_1 sono punti interni dentro (a,b).
($x_0 \in (a,b)$ oppure $x_1 \in (a,b)$ o entrambi).

Ma allora f ha un p.to di estremo locale <u>interno</u>

$\Downarrow$

Quindi lui è un p.to critico

$\square$

TEOR 2 (Lagrange) Sia $[a,b] \subset \mathbb{R}$ $-\infty < a < b < \infty$ e sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funz. cont. in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Allora esiste un p.to $x \in (a,b)$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x) .$$

DIM. Consideriamo la seg. funzione ausiliaria

DIM. Consideriamo la seg. funzione ausiliaria

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x-a)$$

- h è cont. in $[a,b]$
- h è der. in (a,b)
- $h(a) = f(a) - 0 = f(a)$

$$h(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}\cancel{(b-a)} = f(a)$$

La h verifica le ipotesi di Rolle $\Rightarrow \exists\, x \in (a,b)$ tale che $h'(x) = 0$

$$0 = h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$\square$