Lezione 26

giovedì 27 novembre 2014
13:57

Teorema di Hospital

TEOR 1 Siano $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in [a,b]$ e $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue su $[a,b]$ e derivabili in $[a,b] \setminus \{x_0\}$.

Supponiamo che

i) $f(x_0) = g(x_0) = 0$

ii) $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \neq x_0$

iii) Esista (finito o $\pm\infty$) il limite

$$L = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Allora esiste anche il seguente limite ed inoltre

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Dim. È suff. provare che per ogni successione di punti $x_n \in [a,b] \setminus \{x_0\}$ tale che $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ si ha che

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = L$$

Fissato $n \in \mathbb{N}$, per il Teor. di Cauchy esiste un punto $\bar{x}_n \in [x_0, x_n]$ tale che

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{g(x_n) - g(x_0)} = \frac{f'(\bar{x}_n)}{g'(\bar{x}_n)}$$

Siccome $|\bar{x}_n - x_0| \leq |x_n - x_0| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, allora

per ipotesi

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{f'(\bar{x}_n)}{g'(\bar{x}_n)} = L .$$

$$n \to \infty \quad g(x_n) \qquad n \to \infty \quad g'(\bar{x}_n)$$

$\square$

TEOR 2 Siano $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili (e continue) tali che:

i) $\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} g(x) = \infty$

ii) $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b)$

iii) Esiste finito o infinito il limite

$$L = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Allora esiste anche il seguente limite ed inoltre

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L .$$

Dim. omessa.

TEOR 3 Siano $f, g : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili tali che:

i) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$ (opp. $= 0$)

ii) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x > a$

iii) Esiste finito o infinito il limite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L .$$

Allora esiste anche il seg. limite e si ha

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Dim. Omessa.

ES 1 Verificare che per $x \to 0$ vale il seguente sviluppo:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \qquad x \to 0.$$

Soluzione. Devo provare che

$$e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} = o(x^3) \qquad x \to 0$$

Ovvero devo verificare che

$$0 \overset{OK}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - x^2/2 - x^3/3!}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - x^2/2}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{6x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{6} = 0 .$$

ES 2 Per $\alpha > 0$ calcolare il seguente limite:

$$L = \lim_{x \to 0^+} x^\alpha \cdot \log x = [0 \cdot (-\infty)]$$

Primo tentativo:

$$L = \lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{x^{-\alpha}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha \cdot 1}$$

$$x \to 0^+ \qquad -\alpha\, x^{-\alpha-1}$$

$$= -\frac{1}{\alpha} \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha} = 0 \qquad \underline{\text{ok}}$$

ES 3 Stabilire se la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è derivabile nel punto $x = 0$.

Soluz. Intanto controllo se f è cont. in $x = 0$:

$$0 = f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{|x|}} = 0 \quad \text{ok}$$

f è cont. in $x = 0$.

Guardiamo se esiste finito il limite del Rapporto incrementale:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \overset{0}{f(0)}}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{|x|}} \overset{H}{=} \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{|x|}} \cdot D\left(-\frac{1}{|x|}\right)}{1}$$

$$= -\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{|x|}} \frac{-\frac{x}{|x|}}{|x|^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|^3} e^{-\frac{1}{|x|}} \qquad \text{. Non funziona}$$

Altro tentativo

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{|x|}}} \overset{H}{=} \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{[illegible]}{e^{\frac{1}{|x|}}} = \left[\frac{[illegible]}{\infty}\right]$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{|x|}} \cdot \frac{-\frac{x}{|x|}}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}\, \boxed{e^{-\frac{1}{|x|}}} = 0$$

Esiste

Quindi si ha $f'(0) = 0$.

ES Verificare (per induzione su $n \in \mathbb{N}$) che $e^{-\frac{1}{|x|}} \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$ $\forall n$

Devo verificare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{x^n} = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Teorema di Taylor

Sia $A = (a,b) \subset \mathbb{R}$ e sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione.

Definizione

(1) $f \in C(A) \overset{def}{\iff} f$ è continua su A

(2) $f \in C^1(A)$ "di classe C^1 in A" $\iff$ $f'(x)$ esiste $\forall x \in A$ e la funzione $x \mapsto f'(x)$ è continua su A

(3) $f \in C^2(A)$ "di classe C^2 in A" $\iff$ la derivata seconda $f''(x)$ esiste $\forall x \in A$ ed è una funzione continua

(4) $f \in C^k(A)$ "di classe C^k in A" $\iff$ la derivata di ordine k $f^{(k)}(x)$ esiste $\forall x \in A$ ed è una funzione continua.
$k \in \mathbb{N}$

(5) $f \in C^\infty(A)$ "di classe C-infinito su A" $\iff$ $f \in C^k(A)$ $\forall k \in \mathbb{N}$,

ORA! Prendiamo una funzione $f \in C^\infty(A)$ e fissiamo un punto base $x_0 \in A$. Vogliamo approssimare $f(x)$ con un polinomio del tipo

$$\sum_{k=0}^{n} c_k (x-x_0)^k \overset{?}{\sim} f(x)$$

con $n \in \mathbb{N}$ grande se si vuole un errore piccolo. Dobbiamo capire come scegliere i numeri $c_k \in \mathbb{R}$.

<u>Def (Polinomio di Taylor)</u> Il polinomio di Taylor di f di grado $n \in \mathbb{N}$ e con p.to base $x_0 \in A$ è

$$P_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot (x-x_0)^2 +$$

$$+ \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

TEOREMA (Taylor) $f \in C^\infty(A)$, $x_0 \in A$, $n \in \mathbb{N}$. Allora il resto n-esimo e cioè

$$R_n(x, x_0) = f(x) - P_n(x, x_0)$$

verifica le seguenti proprietà. Per ogni $x \in A$ esiste $\xi \in [x_0, x]$ tale che

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}.$$ Formula di Lagrange per il Resto

In particolare si ha

$$R_n(x, x_0) = o((x-x_0)^n) \quad x \to x_0$$ Formula di Peano per il Resto.

Dim. Funzioni Ausiliarie :

$$G(x) = (x-x_0)^{n+1}$$

$$F(x) = R_n(x, x_0) = f(x) - P_n(x, x_0).$$

- $G \in C^\infty$ e $F \in C^\infty$
- Derivate di G in x_0:

$x = x_0 \qquad G^{(k)}(x_0) = 0 \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n$

$\forall x \qquad G^{(n+1)}(x) = (n+1)! \qquad k = n+1$

- Derivate di F in x_0:

$$F^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - \sum_{h=0}^{n} \frac{f^{(h)}(x_0)}{h!} \left[(x-x_0)^h\right]^{(k)}$$

dove

$$\left.\left[(x-x_0)^h\right]^{(k)}\right|_{x=x_0} = \begin{cases} 0 & k < h \\ k! & k = h \\ 0 & k > h \end{cases}$$

Quindi

$k = 0, 1, 2, \dots, n$

$$x = x_0 \qquad F^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) - \frac{f^{(k)}(x_0)}{\cancel{k!}} \cancel{k!} = 0$$

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) \qquad \underline{\forall x}$$

ORA usiamo Ripetutamente il Teorema di Cauchy:

$$\boxed{\frac{F(x)}{G(x)}} = \frac{F(x) - \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{F(x_0)}}{G(x) - \underset{\underset{0}{\shortparallel}}{G(x_0)}} \overset{\text{Esiste } x_1 \in (x_0, x)}{=} \frac{F'(x_1)}{G'(x_1)} =$$

$$= \frac{F'(x_1) - \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{F'(x_0)}}{\dots} \overset{\text{Esiste } x_2 \in (x_0, x_1)}{=} \frac{F''(x_2)}{\dots} =$$

$$= \frac{F'(x_1) - \overset{0}{F'(x_0)}}{G'(x_1) - \underset{0}{G'(x_0)}} = \overset{x_2 \in (x_0, x_1)}{\frac{F''(x_2)}{G''(x_2)}} = $$

$$= \dots = \frac{F^{(n)}(x_n)}{G^{(n)}(x_n)} = \frac{F^{(n)}(x_n) - \overset{0}{F^{(n)}(x_0)}}{G^{(n)}(x_n) - \underset{0}{G^{(n)}(x_0)}} =$$

con $x_n \in (x_0, x_{n-1})$

Esiste $\xi = x_{n+1} \in (x_0, x_n)$, $\xi \in (x_0, x)$

$$= \frac{F^{(n+1)}(x_{n+1})}{G^{(n+1)}(x_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$$\Downarrow$$

$$R_n(x, x_0) = F(x) = G(x) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = (x - x_0)^{n+1} \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$\square$