Lezione 27

venerdì 28 novembre 2014
10:13

Errore

$$f(x) = \underbrace{P_n(x, x_0)}_{\text{Polinomio di Taylor di grado } n} + R_n(x, x_0)$$

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

dove $\xi \in (x_0, x)$

Esiste

Formula di Lagrange

$\Downarrow$

$$R_n(x, x_0) = o\left((x - x_0)^n\right)$$

Resto di Peano

Sviluppi di funzioni elementari:

(1) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$

$$f^{(k)}(x) = e^x \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f^{(k)}(0) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Dunque $\forall n \in \mathbb{N}$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + R_n(x, 0)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + \frac{e^\xi x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Per $x \in \mathbb{R}$ e $\xi \in (0, x)$ opportuno

(2) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$

$f(x) = \sin x$ $\qquad f(0) = 0$

(2) $f(x) = \sin x, \quad x_0 = 0$

$$f(x) = \sin x \qquad f(0) = 0$$
$$f'(x) = \cos x \qquad f'(0) = 1$$
$$f''(x) = -\sin x \qquad f''(0) = 0$$
$$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''(0) = -1$$
$$f^{(4)}(x) = \sin x \qquad f^{(4)}(0) = 0$$

Dunque $\forall k \in \mathbb{N}$

$$f^{(2k)}(0) = 0$$
$$f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \qquad k = 0, 1, 2 \ldots$$

Troviamo lo sviluppo

$$\sin x = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_{2n+1}(x, 0)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$
$$\xi \in (0, x)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \frac{D^{(2n+2)} \sin(\xi)}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

dove $D^{(2n+2)} \sin(\xi) = (-1)^{n+1} \sin(\xi) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

perché $\xi \in (0, x)$

Quindi

$$R_{2n+1}(x, 0) = o(x^{2n+2}) \quad x \to 0 .$$

(3) Sviluppo del logaritmo:

$$f(x) = \log(1+x), \quad x_0 = 0$$

$f(x) = \log(1+x) \, , \quad x_0 = 0$

$$f(x) = \log(1+x) \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} = -(1+x)^{-2} \qquad f''(0) = -1!$$

$$f'''(x) = 2(1+x)^{-3} \qquad f'''(0) = 2!$$

$$f^{(4)}(x) = -3!\,(1+x)^{-4} \qquad f^{(4)}(0) = -3!$$

Quindi in generale

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} (k-1)! \, (1+x)^{-k}$$

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1} \cdot (k-1)!$$

Dunque

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x,0)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} (k-1)!}{k!} x^k + \frac{(-1)^n (1+\xi)^{-(n+1)}}{n+1} x^{n+1} \qquad \xi \in (0,x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \cdot x^k + \text{Resto}$$

(4) $f(x) = \operatorname{arctg} x \, , \quad x_0 = 0$. Esercizio: (1) Verificare che

$$(*) \quad \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$ usando il Teorema di Taylor

(2) Verificare la formula (*) con il Teor. di Hospital.

Altro conto ancora:

$$f'(x) = \frac{1}{} = \frac{1}{} = \sum^{\infty} a^k$$ Serie Geometrica

Geometrica

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

$$\underset{q}{\parallel} \qquad = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

Sviluppo di Taylor di $f'(x)$ con $f(x) = \operatorname{arctg} x$

Integro fra 0 e x

$$= f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k}\,dt =$$

$\operatorname{arctg} x$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^{2k}\,dt$$

$$\boxed{\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.}$$

Esercizio Calcolare $\log(3/2)$ con un errore minore di $\frac{1}{100}$.

Soluzione: Ricordo lo sviluppo del

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + R_n(x,0)$$

$$\text{dove} \quad R_n(x,0) = \frac{(-1)^n (1+\xi)^{-n-1}}{n+1} x^{n+1}$$

$$\xi \in (0,x)$$

ORA prendiamo $x = 1/2$

$$0 < \xi < 1/2$$

$$\log\left(\frac{3}{2}\right) = \log\left(1+\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \frac{1}{2^k} + \frac{(-1)^n (1+\xi)^{-n-1}}{(n+1)\, 2^{n+1}}$$

$$\parallel$$

$$\| \quad R_n\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

Voglio trovare $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left| R_n\left(\frac{1}{2}, 0\right) \right| < \frac{1}{100}$$

Stima:

$$\left| R_n\left(\frac{1}{2}, 0\right) \right| \leq \frac{1}{(n+1)\, 2^{n+1} (1+\xi)^{n+1}} \leq \frac{1}{(n+1)\, 2^{n+1}}$$

Devo trovare l' $n \in \mathbb{N}$ più piccolo tale che

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{100}$$

$$n = 4 \Big| = \frac{1}{160}$$

Basta $n = 4$

$$\log \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \text{ERRORE}$$

$$|\text{ERRORE}| < \frac{1}{100}$$

Serie di Taylor

Def Siano $A = (a,b) \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e sia $f \in C^\infty(A)$. Diciamo che f si sviluppa in serie di Taylor in A se per ogni p.to base $x_0 \in A$ si ha:

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x, x_0) = 0 \quad \text{per tutte le } x \text{ in un intorno di } x_0.$$

In questo caso si trova lo sviluppo in serie per f:

In questo caso si trova lo sviluppo in serie per f:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^n \quad , \quad x \in \text{Intorno di } x_0$$

Si chiama serie di Taylor di f con p.to base x_0

<u>Esempio</u> $f(x) = e^x$ si sviluppa in serie di Taylor.

Verifichiamo questo per $x_0 = 0$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + \underbrace{R_n(x,0)}_{\frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!}}$$

Voglio provare che

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x,0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Sì è vero perchè

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \quad \forall x$$

Quindi si trova il seguente sviluppo di Taylor

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R} .$$

<u>Esercizio</u> Verificare che $\sin x$ e $\cos x$ si sviluppano in serie di Taylor col indotte

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{k=0} \frac{(-1)}{(2k+1)!} x^{2k+1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Identità di Eulero

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Parto da qui

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Sostituiamo ix al posto di x:

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} i^k \frac{x^k}{k!}$$

$$i^0 = 1$$
$$i^1 = i$$
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = -i$$
$$i^4 = +1$$

In generale

$$i^{2k} = (-1)^k$$

$$i^{2k+1} = i \, i^{2k} = (-1)^k \cdot i$$

Quindi

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$= \cos x + i \sin x$.

$\square$

INTEGRALE DI RIEMANN

1) Definizione di Integrale. Propr. Generali
2) le funz. cont. sono integrabili
3) Teorema fondamentale del calcolo integrale
4) Tecniche di calcolo: per sost. | per parti
5) Integr. di funz. Razionali
6) Integrali impropri: Criteri di Convergenza.

Definizione di Integrale

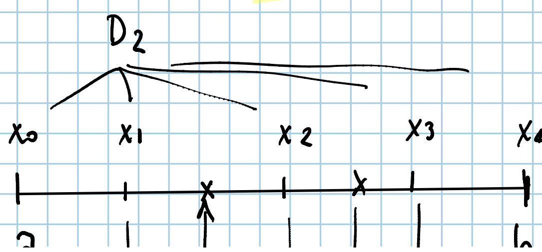
Sia $A=[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo limitato.
Sia poi $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione LIMITATA.
Vogliamo definire il simbolo

$$\int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}.$$

DEF 1 Una suddivisione di $[a,b]=A$ è un insieme ordinato di punti $D = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$ con $n \geq 1$.

Indichiamo con $\mathcal{D}(A) = \{D \text{ suddivisione di } A=[a,b]\}$

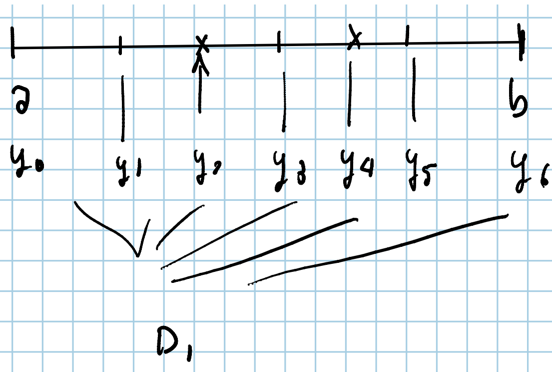
DEF 2 Siano D_1 e D_2 due suddivisioni di $A=[a,b]$.
Diciamo che D_1 è più fine di D_2 se $D_2 \subset D_1$.



Data $f: [a,b) \to \mathbb{R}$ LIMITATA
e data

e data

$$D = \{ \overset{a}{\overset{\shortparallel}{x_0}} < x_1 < \dots < x_n = b \}$$



suddivisione di $[a,b] = A$
definiamo le somme inferiori
e le somme superiori di f
relative alla suddiv. D nel seg. modo

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1})$$