Lezione 28

lunedì 1 dicembre 2014

10:14

Somme inferiori e superiori

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funzione limitata

$D = \{ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \}$ suddivisione di $[a,b]$

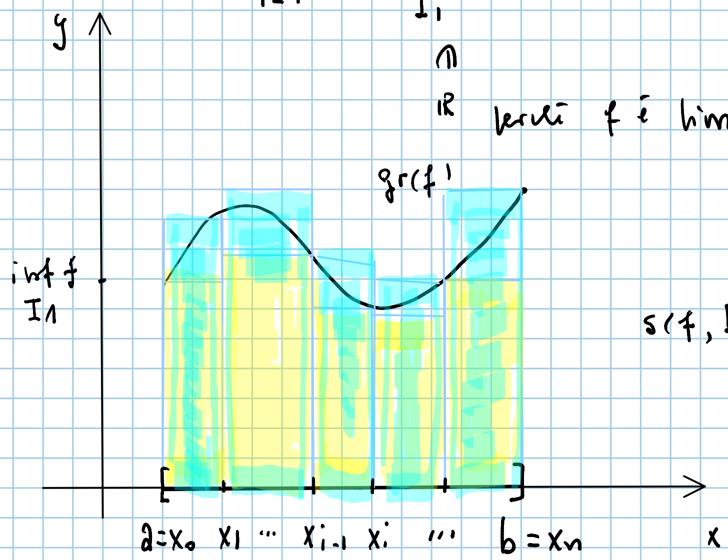
Consideriamo

$$I_i = [x_{i-1}, x_i] \quad \text{intervallo } i\text{-esimo della suddivisione}$$

Somme inferiori di f relative a D:

$$s(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\inf_{I_i} f \Big) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$\inf_{I_i} f \in \mathbb{R}$ perché f è limitata



$s(f,D) =$

Poi le somme superiori di f relative a D

$$S(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sup_{I_i} f \Big) (x_i - x_{i-1})$$

$\sup_{I_i} f \in \mathbb{R}$

Prop Si hanno

1) $\forall$ suddivisione D vale: $\quad s(f,D) \leq S(f,D)$

2) Se D_1 è una suddivisione più fine della suddivisione D_2 allora

$$\underset{\text{più fine}}{s(f, D_1)} \geq \underset{\text{più rozza}}{s(f, D_2)} \quad e \quad \underset{\text{più fine}}{S(f, D_1)} \leq S(f, D_2)$$

3) Se D_1 e D_2 sono due suddivisioni generiche, allora si ha comunque

$$s(f, D_1) \leq S(f, D_2)$$

4) Si ha sempre $(\forall f)$

$$\sup_{D \in \mathcal{D}(A)} s(f, D) \boxed{\leq} \inf_{D \in \mathcal{D}(A)} S(f, D)$$

Dim. Provo 3):

$$s(f, D_1) \leq s(f, D_1 \cup D_2) \leq S(f, D_1 \cup D_2) \leq S(f, D_2)$$

$D_1 \cup D_2$ sudd.
più fine di D_1 e anche di D_2

4) Segue da 3): $\quad \forall D_1 \ \forall D_2$

$$s(f, D_1) \leq S(f, D_2)$$

$$\Downarrow$$

$$\sup_{D_1 \in \mathcal{D}(A)} s(f, D_1) \leq S(f, D_2) \quad \forall D_2$$

$$\Downarrow$$

$$\sup_{D_1 \in \mathcal{D}(A)} s(f, D_1) \leq \inf_{D_2 \in \mathcal{D}(A)} S(f, D_2).$$

<u>DEF</u> (funzione Riemann integrabile). Sia $A = [a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato e sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione <u>limitata</u> (anche non cont.). Diciamo che f è R-integrabile su A se

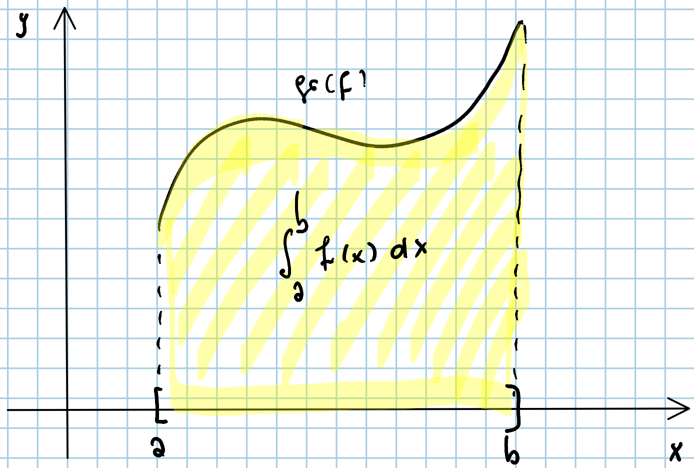
$$\sup_{D \in \mathcal{D}(A)} s(f, D) = \inf_{D \in \mathcal{D}(A)} S(f, D).$$

$$\sup_{D \in \mathcal{D}(A)} s(f, D) = \inf_{D \in \mathcal{D}(A)} S(f, D).$$

In questo caso definiamo l'integrale di f su $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup_{D \in \mathcal{D}(A)} s(f, D) = \inf_{D \in \mathcal{D}(A)} S(f, D) \in \mathbb{R}.$$

Interpretazione geometrica Se $f \geq 0$ l'integrale è l'area della regione del piano sotto il grafico di f:



Teorema Proprietà generali dell' integrale di Riemann

(1) Linearità: Se $f, g \in R(A)$ "sono R.-int. su A" e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ allora $\alpha f + \beta g \in R(A)$ e inoltre:

$$\int_a^b \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

(2) Monotonia. Se $f, g \in R(A)$ e $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in A$ allora

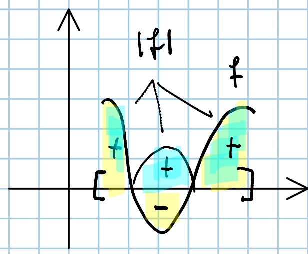
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

(3) Scomposizione del dominio. Se $f \in R(A)$ e $A = [a,b] = [a,c] \cup [c,b]$ allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

allora
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

(4) Se $f \in R(A)$ allora $|f| \in R(A)$ e inoltre
$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \boxed{\int_a^b |f(x)|\,dx}.$$



Convenzione (Integrale con segno). Se $f \in R([a,b])$ con $a<b$ allora definiamo
$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Osservazione Esistono funzioni che non sono integrabili. Ad esempio la funzione di Dirichlet $f: [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

Questa funz. NON è integrabile. Infatti prendo una qualsiasi $D \in \mathcal{D}([0,1])$ e prendo $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ intervallo qualsiasi di questa suddivisione, avremo: $x_{i-1} < x_i$

$$\sup_{I_i} f = 1 \quad \forall i$$
$$\inf_{I_i} f = 0 \quad \forall i$$
$$\Downarrow$$
$$s(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \overbrace{\left(\inf_{I_i} f\right)}^{0} \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0 \quad \forall D$$
$$S(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \overbrace{\left(\sup_{I_i} f\right)}^{1} \cdot (x_i - x_{i-1}) = 1 \quad \forall D$$

Dunque

$$\sup_D s(f,D) = 0 \neq 1 = \inf_D S(f,D).$$

Integrabilità delle funzioni continue

Vogliamo provare questo teorema:

TEOR 1 Ogni funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua è R-integrabile in $[a,b]$.

TEOR 2 Ogni funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monotona è R-integrabile in $[a,b]$

Come corollario del Teor. 1 i polinomi, le funz. trig, le funz. esponenziali, i logaritmi e loro "composizioni" sono integrabili.

Premettiamo la seg. def.

DEF. Diciamo che una funzione $f: A\to\mathbb{R}$, $A\subset\mathbb{R}$, è uniformemente cont. in A se:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0 \text{ tale che } \underset{x,y\in A}{|x-y|<\delta} \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

δ universale, indipendente dai punti.

Esempio $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ $f(x)=\frac{1}{x}$ è cont. in tutto il dominio $A=(0,1]$. Ma non è uniform. cont. in $(0,1]$ perché esistono punti "vicini" con valori "lontani".

TEOR. Sia $A=[a,b]\subset\mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato. Se $f: A\to\mathbb{R}$ è cont. in ogni punto di A allora f è uniformemente cont. in A.

Dim Ovvia. Λ

... cont. su A.

Dim. ovvero.

Proviamo che $f: \underset{\overset{\|}{A}}{[a,b]} \to \mathbb{R}$ cont. $\Rightarrow$ f è R-integrabile.
Ricordo che

$$\sup_{D \in \mathcal{D}(A)} s(f,D) \overset{\text{sempre vero}}{\leq} \inf_{D \in \mathcal{D}(A)} S(f,D)$$

$=$ obiettivo

È suff. provare che

$$\sup_{D \in \mathcal{D}(A)} s(f,D) \geq \inf_{D \in \mathcal{D}(A)} S(f,D)$$

Fissato $\varepsilon > 0$ arbitrario, proviamo che esiste una suddivisione $D \in \mathcal{D}(A)$ t.c. che

$$\circledast \qquad s(f,D) \geq S(f,D) - \varepsilon$$

$\forall \varepsilon$ Esiste!

Se $\circledast$ è vera ($\forall \varepsilon$ $\exists D$ che rende vera $\circledast$) allora la tesi segue.

Siccome f è cont. su $A = [a,b]$ chiuso e limitato, allora f è uniform. cont. su A:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \quad x,y \in [a,b]$$
$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Allora io prendo una suddivisione $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ t.c. che

$$|x_i - x_{i-1}| < \delta \qquad \forall i = 1, 2 \ldots n$$

Quindi

$$x,y \in I_i \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$
$$(|x-y| < \delta)$$

Quindi

$$\sup f - \inf f \leq \varepsilon \qquad \forall i$$

$I_i \qquad I_i$

Allora:

$$0 \leq S(f,D) - s(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{I_i} f \cdot (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} \inf_{I_i} f \, (x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sup_{I_i} f - \inf_{I_i} f \right)}_{\leq \varepsilon} \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq$$

$$\leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon \cdot (b-a).$$

$\square$

Fine Dim.

<u>Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale</u>

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

<u>DEF</u> 1 La funzione $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ così definita:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad x \in [a,b]$$

Integrale esiste $\forall x$ perché f è integrabile, essendo continua.

si dice <u>Funzione Integrale di f</u>.

<u>DEF</u> 2 Diciamo che una funzione $G \in C^1([a,b])$ è una <u>primitiva</u> di f se $G'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$

Lemma (della Media Integrale) Siano $A = [a,b]$ ed $f \in C(A)$.

Lemma (della Media Integrale) Siano $A = [a,b]$ ed $f \in C(A)$.

Allora esiste un p.to $\xi \in [a,b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)$$

Dim. Chiaramente per monotonia

$$\min_{[a,b]} f \cdot (b-a) \leq \int_a^b \underset{\underset{\min_{[a,b]} f}{\geq}}{\overset{\overset{\forall x \quad \max_{[a,b]} f}{\leq}}{f(x)}}\,dx \leq \max_{[a,b]} f \cdot (b-a)$$

Dunque

$$\min_{[a,b]} f \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leq \max_{[a,b]} f$$

Per il Teor. dei valori intermedi esiste $\xi \in [a,b]$ come nell'enunciato. $\square$

Lemma 2 Siano $F, G \in C^1([a,b])$ nell'intervallo $[a,b]$.

due funzioni tali che $F'(x) = G'(x)$ $\forall x \in [a,b]$.

Allora $F(x) - G(x) =$ costante.

Dim. $H(x) = F(x) - G(x)$ verifica

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = 0 \quad \forall x \in \text{intervallo}$$

$$\Downarrow$$

H è costante nell'intervallo.

TEOR. (Fondamentale del Calcolo Integrale)

Sia $f \in C([a,b])$ una funzione continua e sia $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ la sua funzione integrale. Allora

(1) F è derivabile in tutto $[a,b]$ e inoltre $F'(x) = f(x) \; \forall x \in [a,b]$

(2)