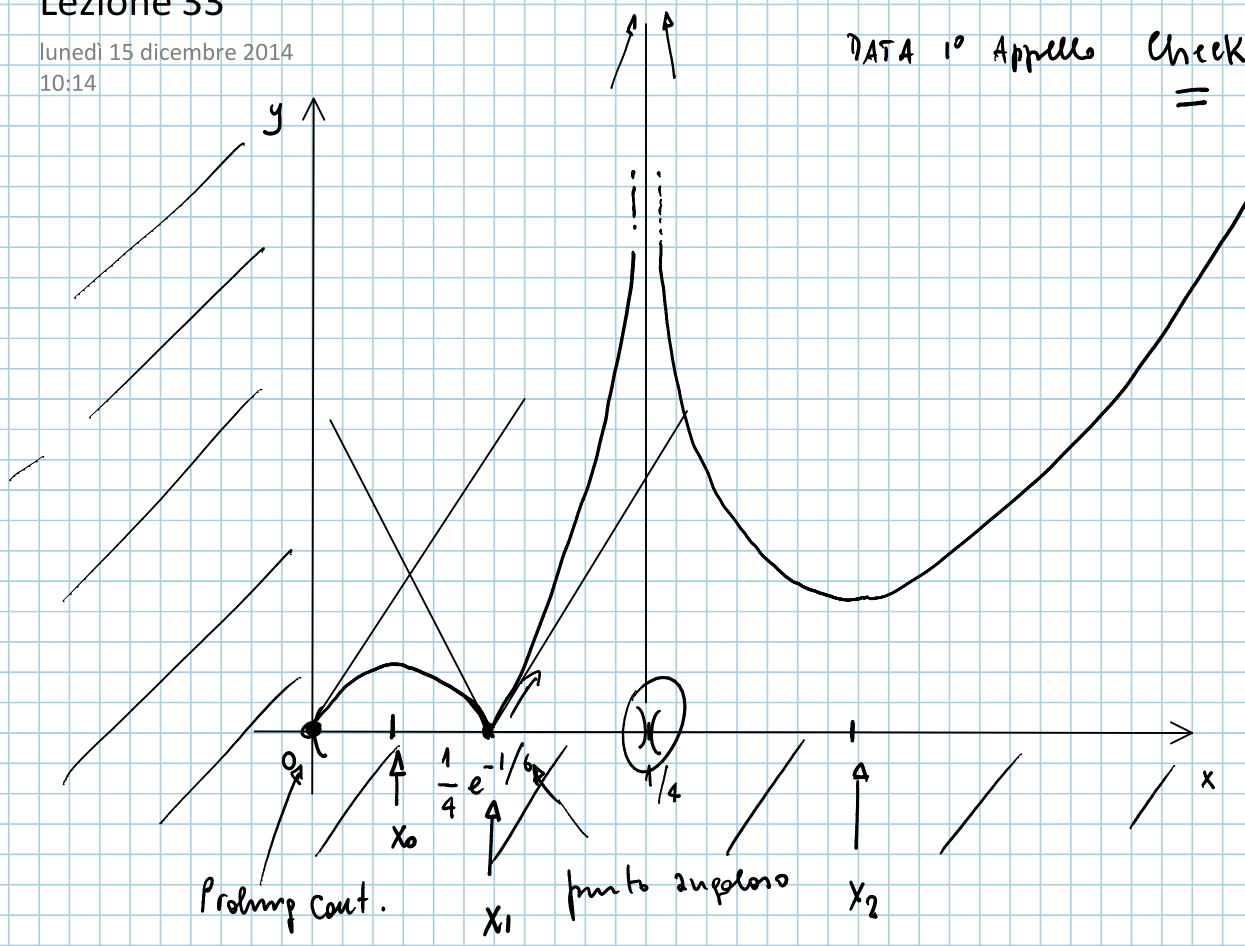
Lezione 33

lunedì 15 dicembre 2014
10:14

DATA 1° Appello Check



Formula di $f'(x)$:

$$f'(x) = \left| 6 + \frac{1}{\log 4x} \right| \cdot \left(1 - \frac{1}{(6 \log 4x + 1) \log 4x} \right)$$

<u>Segno di $f'(x)$ e intervalli di monotonia</u>

$$f'(x) > 0 \iff 1 - \frac{1}{(6 \log 4x + 1) \log 4x} > 0$$

$$\iff \frac{6 \log^2 4x + \log 4x - 1}{(6 \log 4x + 1) \log 4x} > 0$$

Per chiarezza poniamo $t = \log 4x$. Devo studiare

$$\frac{6t^2+t-1}{(6t+1)\,t} > 0$$

• Numeratore : $6t^2+t-1>0$. Radici

$$t_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{12} \left\langle \begin{array}{l} +\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Dunque

$$6t^2+t-1>0 \iff t \in (-\infty, -1/2) \cup \left(\tfrac{1}{3}, \infty\right)$$

• Denominatore : $(6t+1)\cdot t > 0$ $\quad t = \left\langle \begin{array}{l} 0 \\ -1/6 \end{array} \right.$

$$(6t+1)t>0 \iff t \in (-\infty, -1/6) \cup (0, \infty)$$

Conclusione

	$-1/2$		$-1/6$		0		$1/3$	
$N(t)=6t^2+t-1$	$+++$		$---$		$---$		$---$	$+++$
$D(t) = (6t+1)t$	$+++$		$+++$		$---$		$+++$	$+++$
$\frac{N(t)}{D(t)}$	$+++$		$---$		$+++$		$---$	$+++$
$f'(x)$	$+++$		$---$		$+++$		$---$	$+++$
$f(x)$	$\uparrow$		$\downarrow$		$\uparrow$		$\downarrow$	$\uparrow$
	$\frac{1}{4}e^{-1/2} = x_0$		$\frac{1}{4}e^{-1/6} = x_1$		$1/4$		$\frac{1}{4}e^{1/3} = x_2$	

$t = \log 4x$

$e^t = 4x$

$x = \frac{1}{4}e^t$

Dunque

x_0 = p.to di max locale

x_1 = p.to di min locale cui $f(x_1)=0$ È Assoluto

x_2 = p.to di min locale

Conclusione: $f(x)$ cresce in ciascuno di questi intervalli:

$(0, x_0)$ qui $f\uparrow$

$(x_1, 1/4)$ " $f\uparrow$

(x_2, ∞) " $f\uparrow$

Negli altri 2 intervalli $f\downarrow$.

Chiaramente $f'(x_0)=0$ ed $f'(x_2)=0$

Rimarrebbe da calcolare il

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \left|6 + \frac{1}{\log 4x}\right| \left(1 - \frac{1}{(6\log 4x + 1)\log 4x}\right)$$

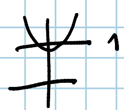
$$= 6$$

$\square$

ESERCIZIO Studiare la funzione

$$f(x) = \log(\cosh x) - \log|\sinh x - 1| .$$

- Dominio: $\cosh x > 0 \ \forall x$ perchè il $\log(\cosh x)$ sia definito

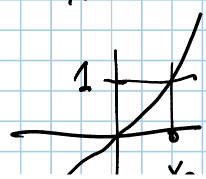


$\cosh x \geq 1 \ \forall x \Rightarrow$ è ok.

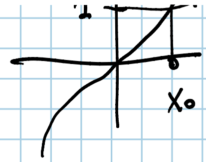
Devo imporre $|\sinh x - 1| \neq 0 \iff \sinh x - 1 \neq 0$

$\iff \sinh x \neq 1$

C'è un punto $x_0 > 0$ fuori dal dominio ($x_0 = \log(1+\sqrt{2})$)



... dominio ($x_0 = \log(1+\sqrt{2})$)



- Segno : Studio

$$f(x) > 0 \iff \log \cosh x - \log|\sinh x - 1| > 0$$

$$\iff \log\left(\frac{\cosh x}{|\sinh x - 1|}\right) > 0$$

$$\iff \frac{\cosh x}{|\sinh x - 1|} > 1$$

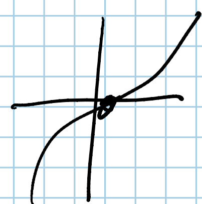
$$\iff \cosh x > |\sinh x - 1|$$

$$\iff \cosh^2 x - \sinh^2 x > -2\sinh x + 1$$

Uso l'identità iperbolica:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\iff 1 > -2\sinh x + 1$$



$$\iff \sinh x > 0$$

$$\iff \underline{\underline{x > 0}}$$

Limiti

- $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \log\left(\frac{\cosh x}{|\sinh x - 1|}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \log\left(\frac{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})}{\left|\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - 1\right|}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \log\left(\frac{\cancel{e^{-x}}}{\cancel{e^{-x}}} \cdot \frac{\frac{1}{2}(e^{2x} + 1)}{\left|\frac{1}{2}(e^{2x} - 1) - e^x\right|}\right)$$

$$= \lim \log\left(\frac{\frac{1}{2}}{\left|-\frac{1}{2}\right|}\right) = 0$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \log\left(\frac{2}{\left|-\frac{1}{2}\right|}\right) = 0$$

- $$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \log\left(\frac{e^x}{e^x} \frac{\frac{1}{2}(1+e^{-2x})}{\left|\frac{1}{2}(1-e^{-2x}) - e^{-x}\right|}\right)$$

$$= \log(1) = 0$$

- $$\lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = \lim_{x \to x_0^\pm} \log\left(\frac{\cosh x}{|\sinh x - 1|}\right) = +\infty .$$

Asintoti

- $y = 0$ Asintoto orizzontale a $\pm\infty$
- $x = x_0$ Asintoto verticale per $x \to x_0^\pm$

Continuità e derivabilità

- f è continua nel dominio $D(f)$ perché composiz. di funz. elementari cont.
- f è derivabile in tutto $D(f)$

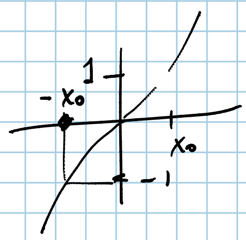
Derivata

$$f'(x) = D\left(\log \cosh x - \log|\sinh x - 1|\right)$$

$$= \frac{\sinh x}{\cosh x} - \frac{\cosh x}{\sinh x - 1}$$

$$= \frac{\sinh^2 x - \sinh x - \cosh^2 x}{\cosh x(\sinh x - 1)}$$

$$= \frac{1 + \sinh x}{\cosh x\,(1 - \sinh x)} = f'(x)$$



Segno di $f'(x)$. Monotonia

Studio $f'(x) > 0$

$N(x) > 0 \iff 1 + \sinh x > 0 \iff \sinh x > -1$

$\iff x > -x_0$

$D(x) > 0 \iff \cosh x\,(1 - \sinh x) > 0$

$\iff 1 - \sinh x > 0$

$\iff \sinh x < 1 \iff x < x_0$

		$-x_0$		0		$+x_0$ (×)	
$N(x)$	$- - -$		$+ + +$		$+ + +$		$+ + +$
$D(x)$	$+ + +$		$+ + +$		$+ + +$		$- - -$
$f'(x)$	$- - -$		$+ + +$		$+ + +$		$- - -$
$f(x)$	$\downarrow$		$\uparrow$				$\downarrow$

$f'(-x_0) = 0$

p.to di minimo locale

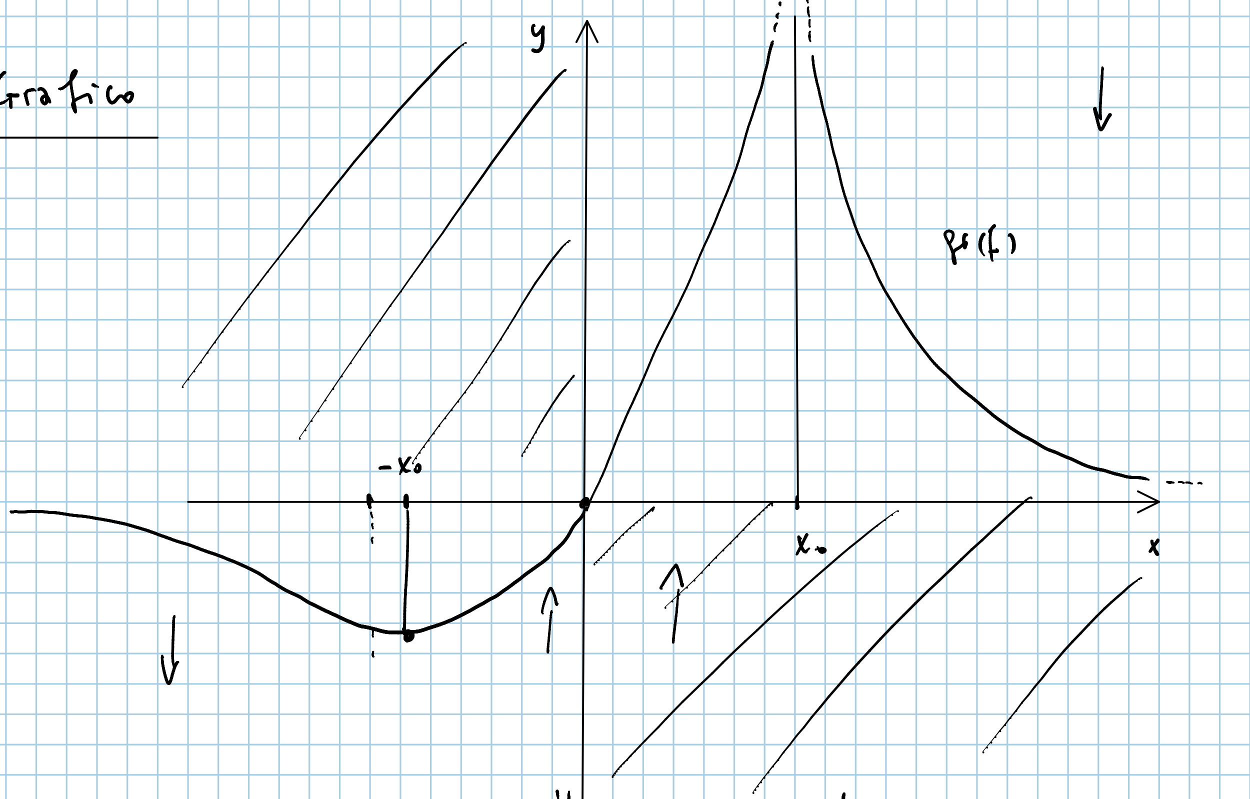
Dunque

in $(-x_0, x_0)$ f cresce

In $(-\infty, -x_0)$ f decresce

In (x_0, ∞) f decrescente.

Grafico



Vedo che $-x_0$ è un <u>il</u> unico p.to di min assoluto.

□

ESERCIZIO

Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\left|\frac{x}{x-1}\right|}\right)$$

- Dominio $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- Segno $f \geq 0$ in $D(f)$
  Ovvero anche $f(x) \leq \pi/2 \quad \forall x \in D(f)$
- Limiti

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} f(x) = +\frac{\pi}{2}$$

$\longrightarrow$ ponendo $f(1) := \frac{\pi}{2}$ ottengo un prolungamento di f a tutto $\mathbb{R}$

(anche in $x=1$)
che è continua.

- Derivabilità. f è certamente derivabile per $x \neq 1$ e $x \neq 0$.
I punti $x=0$ ed $x=1$ sono problematici.

- Calcolo la derivata per $x \neq 0$ e $x \neq 1$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left|\frac{x}{x-1}\right|} \cdot \frac{1}{2}\left|\frac{x}{x-1}\right|^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\frac{x}{x-1}}{\left|\frac{x}{x-1}\right|} \cdot \frac{-1}{(x-1)^2}$$

- Limiti di $f'(x)$ in $x=0$ ed $x=1$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) =$$

Segno

$$\frac{x}{x-1} \cdot (-1) = \frac{x}{1-x}$$ dopo le vacanze