Lezione 34

giovedì 8 gennaio 2015
14:17

ES 1 Dato che

$$(*) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n^2} = 0$$

Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^2 + \log(n!) + \cos n\right) \cdot \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) \log(n+1) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \log(n-1)\right)$$

Poi provare $(*)$.

Soluzione

$$n! = \underset{\substack{\vee\!/ \\ n}}{n} \cdot \underset{\substack{\vee\!/ \\ n}}{(n-1)} \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot \underset{\substack{\vee\!/ \\ n}}{3} \cdot \underset{\substack{\vee\!/ \\ n}}{2} \cdot \underset{\substack{\vee\!/ \\ n}}{1} \le n^n$$

e quindi

$$\log n! \le \log(n^n) = n \cdot \log n$$

e quindi

$$0 \le \frac{\log(n!)}{n^2} \le \frac{n \cdot \log n}{n^2} = \frac{\log n}{n}$$

$0 \to 0$, $\frac{\log(n!)}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $\frac{\log n}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ NOTO

Per confronto $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log n!}{n^2} = 0$

Conti di prep.

$$n^2 + \log n! + \cos n = n^2 \left(1 + \frac{\log n!}{n^2} + \frac{\cos n}{n^2}\right)$$

Sviluppi:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad x \to 0$$

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{3!} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad n \to \infty$$

Poi:

$$\log(n+1) \overset{?}{=} \log\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \log n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Uso

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad x \to 0$$

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad n \to \infty$$

Ora uso

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad x \to 0$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{3}\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad n \to \infty$$

Poi

$$\log(n-1) = \log\left[n\left(1-\frac{1}{n}\right)\right] = \log n + \log\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

dove

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\log\left(1+\left(-\frac{1}{n}\right)\right) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Dunque la 2^ par. tonda è:

$$(\dots)_{2^\wedge} = \sin\left(\frac{1}{n}\right)\log(n+1) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right)\log(n-1)$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\left[\log n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] -$$

$$- \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\left[\log n - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$- \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \Big[\ \cdot \ \ \frac{}{n} \ \ \frac{}{2n^2} \ \ \frac{}{n} \ \Big]$$

$$= \cancel{\frac{1}{n}\log n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$- \frac{1}{6}\frac{1}{n^3}\log n + \log n \cdot o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$- \Big\{ \cancel{\frac{1}{n}\log n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$- \frac{1}{3n^3}\log n + \log n \ o\left(\frac{1}{n^3}\right) \Big\}$$

$$= \frac{2}{n^2} + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)\frac{\log n}{n^3} + \frac{\log n}{n^3} \cdot o(1)$$

Il limite è:

$$\lim_{n\to\infty} (\ldots)_{1^\wedge} \cdot (\ldots)_{2^\wedge} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot (1 + o(1)) \left(\frac{2}{n^2} + \frac{1}{6}\frac{\log n}{n^3} + \frac{\log n}{n^3} \cdot o(1) \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} (1+o(1)) \left(2 + \frac{1}{6}\frac{\log n}{n} + \frac{\log n}{n} \cdot o(1) \right)$$

$$= 1 \cdot 2 = 2.$$

□

ES 2 Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(\frac{3z+1}{3z-1} \right)^3 = 1$$

e rappr. nel piano di Gauss.

Sol. 1^ Soluzione. Deve essere $3z-1 \neq 0 \Leftrightarrow z \neq 1/3$.

Poniamo $w = \dfrac{3z+1}{3z-1}$ e risolviamo

$$w^3 = 1 = R e^{i\varphi}$$

con $R = 1$ e $\varphi = 0$

e cerco una soluzione $w = r e^{i\vartheta}$ con $r \geq 0$ da det.
$\vartheta \in [0, 2\pi)$ da det

Avremo

$$w^3 = (r e^{i\vartheta})^3 = r^3 \cdot (e^{i\vartheta})^3 = r^3 e^{i3\vartheta}$$

L'eq.:

$$r^3 e^{i3\vartheta} = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$$

$$\begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\vartheta = 0 + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} r = 1 \\ \vartheta_k = \dfrac{2k}{3}\pi \end{cases} \quad k = 0, 1, 2$$

Abbiamo le 3 soluz.

$$w_0 = 1$$
$$w_1 = e^{\frac{2}{3}\pi i} = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi$$
$$w_2 = e^{\frac{4}{3}\pi i} = \cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi$$

ORA:

$$w = \frac{3z+1}{3z-1} \Leftrightarrow w(3z-1) = 3z+1$$
$$\Leftrightarrow 3zw - w = 3z+1$$
$$\Leftrightarrow 3zw - 3z = w+1$$
$$\Leftrightarrow 3z(w-1) = w+1$$

$$\iff \quad 3z(w-1) = w+1$$

$$\underset{w \neq 1}{\iff} \quad z = \frac{1}{3}\,\frac{w+1}{w-1}$$

$w_0 = 1$ È da scartare. Ci sono 2 soluz. (...)

2^ Soluzione. Devo supporre $3z-1 \neq 0$

$$1 = \left(\frac{3z+1}{3z-1}\right)^3 = \frac{(3z+1)^3}{(3z-1)^3}$$

$$\Updownarrow \quad 3z-1 \neq 0$$

$$(3z-1)^3 = (3z+1)^3$$

$$\cancel{27z^3} - 27z^2 + \cancel{9z} - 1 = \cancel{27z^3} + 27z^2 + \cancel{9z} + 1$$

$$2 \cdot 27z^2 = -2$$

$$\Updownarrow$$

$$27z^2 = -1 \quad \iff$$

ORALE

FUNZ. INT.

$$\Updownarrow$$

$$z^2 = -\frac{1}{27} = -\frac{1}{3 \cdot 3^2}$$

$$z = \pm\sqrt{\frac{-1}{3 \cdot 3^2}} = \pm\frac{\sqrt{-1}}{3\sqrt{3}} = \pm\frac{i}{3\sqrt{3}}$$

$\square$

ES. 3 Calcolare

$$I = \int_{\log 5}^{\infty} \frac{\sqrt{e^x+4}}{e^x+5}\,dx$$

Sol. Devo calcolare

$$\lim \int^{M} \frac{\sqrt{e^x+4}}{\quad} dx = \lim I_M$$

$$\lim_{M\to\infty} \int_{\log 5}^{M} \frac{1}{e^x+5}\,dx = \lim_{M\to\infty} I_M$$
$$\| \quad I_M$$

Sost. $y = \sqrt{e^x+4} \iff y^2 = e^x+4 \iff e^x = y^2-4$

$\iff x = \log(y^2-4)$

$y^2+1 = e^x+5$

$\longrightarrow \quad dx = \dfrac{1}{y^2-4}\, 2y\, dy$

$x = \log 5 \implies y = \sqrt{5+4} = 3$

$x = M \implies y = \sqrt{e^M+4} = y_M$

Quindi

$$I_M = \int_3^{y_M} \frac{y \cdot 2y}{(y^2+1)(y^2-4)}\, dy$$

Fratti semplici:

$$\frac{2y^2}{(y^2+1)(y-2)(y+2)} = \frac{A+By}{y^2+1} + \frac{C}{y-2} + \frac{D}{y+2} =$$

Con $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ cost. da determinare

Conti:

$$= \frac{(y^2-4)(A+By) + C(y^2+1)(y+2) + D(y^2+1)(y-2)}{(y^2+1)(y-2)(y+2)}$$

$= \ldots =$

Avremo 4 equazione $\longrightarrow$ Determiniamo le

Avremo 4 equazione $\to$ Determiniamo le 4 cost. $A B C D$

ominimo

$$I = \lim_{M\to\infty} I_M = \boxed{\frac{2}{5}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(3)\right) + \frac{2}{5}\log 5}.$$

Es. 4 Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ discutere la conv. della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\boxed{n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)} - \frac{\alpha}{n}\right)$$

Soluzione. Sviluppi

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \qquad x \to 0$$

$$e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \qquad n \to \infty$$

L'arg. del log. è:

$$n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right) - \frac{\alpha}{n} = n\left(\cancel{1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \cancel{-1}\right) - \alpha/n$$

$$= 1 + \boxed{\frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{\alpha}{n}}$$

Il termine gen. della serie è infinitesimo.

Voglio fare il confr. Asintotico.

$$\log(1+x) = x + o(x) \qquad x \to 0$$

Dunque

$$a_n = \log(\ \ \ldots\ \ ) = \frac{1}{\ }+\frac{1}{\ } + o\left(\frac{1}{\ }\right) - \frac{\alpha}{\ } \quad (\qquad)$$

Dunque

$$a_n = \log\left(\dots \right) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{\alpha}{n} + o\left(\quad \right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) + \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + o\left(\quad \right)$$

1° CASO. Se $\alpha \neq 1/2$ Allora

$$a_n = \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} - \alpha \neq 0$$

Quindi per TCA

$$\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n < \infty \iff \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n} < \infty \quad \text{NO}$$

Conclusione N. 1: Se $\alpha \neq 1/2$ Allora Serie diverge

2° CASO: $\alpha = \frac{1}{2}$. Quindi

$$a_n = \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

In questo caso

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{6} \neq 0$$

Quindi per TCA

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \quad \text{Sì}$$

$$\sum_{n=1} a_n < \infty \iff \sum_{n=1} \frac{1}{n^2} < \infty$$

Conclusione N. 2: Se $\alpha = 1/2 \Rightarrow$ Serie Converge.