Lezione4

venerdì 10 ottobre 2014
09:35

ES 3 Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^3 = 9\,\bar{z}$$

e rappr. nel piano complesso.

Sol. Non abbiamo un polinomio complesso!
$z = 0$ è certamente soluzione.

Cerco soluzioni $z = r e^{i\vartheta}$ in forma esp. con

$r = |z| \geq 0$ da det.
$\vartheta = \arg(z) \in [0, 2\pi)$ da det.

Sost.:

$$(re^{i\vartheta})^3 = 9\,\overline{(re^{i\vartheta})} = 9 \cdot \bar{r}\,\overline{e^{i\vartheta}} = 9 r e^{-i\vartheta}$$

$$(re^{i\vartheta})^3 = r^3 (e^{i\vartheta})^3 = r^3 e^{i3\vartheta}$$

Trovo il sistema:

$$\begin{cases} r^3 = 9r \\ 3\vartheta = -\vartheta + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

1^ Eq.: $r^3 = 9r$, c'è la sol. $r = 0$ $(\rightarrow z = 0)$
se $r \neq 0$ $(r > 0)$ posso dividere per r e trovare

$$r^2 = 9 \implies r = 3 \quad (r = -3 \text{ è da scartare})$$

2^ Eq.:

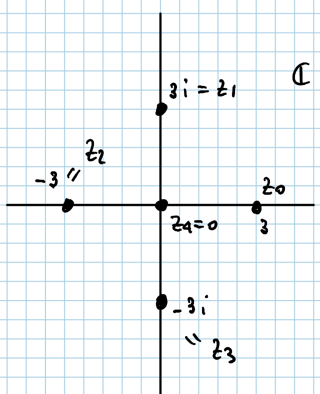
$$4\vartheta = 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\vartheta_k = \frac{k}{2}\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Elenco soluzioni

$z_4 = 0$ è sol.
$z_0 = 3e^{i\vartheta_0} = 3e^{i \cdot 0} = 3$
$z_1 = 3e^{i\pi/2} = 3i$
$z_2 = 3e^{i\pi} = -3$
$z_3 = 3e^{i\frac{3}{2}\pi} = -3i$

5 soluzioni



ES.4 Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione:

$$z^3 \bar z + 3z^2 - 4 = 0 .$$

Soluzione. $z = x + iy$

L'eq.:

$$z^2 \left(\underbrace{z \cdot \bar z}_{= |z|^2} + 3 \right) = 4 \qquad z\bar z = |z|^2$$

$$|z| = \sqrt{z \bar z}$$

$$\rightarrow \ \blacksquare \quad z^2 \left(|z|^2 + 3 \right) = 4$$

$$\Downarrow$$

$$= \left| z^2 \left(|z|^2 + 3 \right) \right| = |4| = 4$$

$$= |z^2| \, \left| \left(|z|^2 + 3 \right) \right|$$

$$= |z|^2 \left(|z|^2 + 3 \right) = 4$$

Sia $t = |z|^2 \geq 0$. L'eq. precedente diventa

$$t(t+3) = 4$$

$$t^2 + 3t - 4 = 0$$

$$t_\pm = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \left\langle \begin{array}{l} 1 \quad \text{ok} \\ \cancel{-4} \quad \text{Da scartare} \end{array} \right.$$

Ho scoperto che

$$|z|^2 = t = 1$$

$$\Downarrow$$

$$|z| = 1$$

Metto $|z| = 1$ in $\blacksquare$ e trovo

$$z^2 (3 + 1) = 4$$

$$\Updownarrow$$

$$z^2 = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$z = \pm 1$$

Ci sono solo 2 soluzioni.

ES. 5 Disegnare nel piano di Gauss l'insieme dei numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\left(i z^2 - i \bar z^2 \right) \geq -4 \\ \left| z - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\sqrt{2} \right| \leq \sqrt{2} . \end{cases}$$

Sol. La seconda diseq. è:

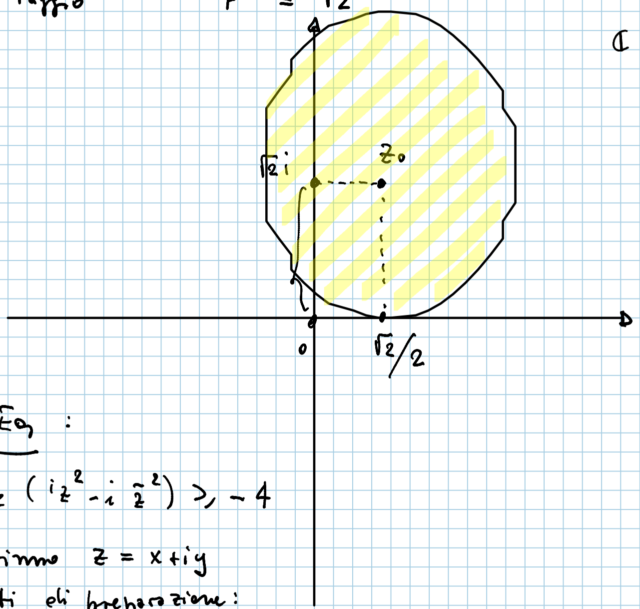
Sol. La seconda diseq. è:

$$\left| z - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\sqrt{2} \right) \right| \leq \sqrt{2}$$

Gli $z \in \mathbb{C}$ che risolvono tale diseq. sono tutti e soli i punti dentro il cerchio chiuso con centro

$$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\sqrt{2}$$

e raggio $r = \sqrt{2}$



2^ Eq:

$$Re\,(iz^2 - i\bar{z}^2) \geq -4$$

Mettiamo $z = x + iy$

Conti di preparazione:

$$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy + i^2y^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$(\bar{z})^2 = \overline{(z^2)} = x^2 - y^2 - 2ixy$$

Dunque

$$iz^2 - i\bar{z}^2 = i\,(z^2 - \bar{z}^2)$$
$$= i\,(\cancel{x^2} - \cancel{y^2} + 2ixy - \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 2ixy)$$
$$= i \cdot 4ixy = 4i^2xy = -4xy$$

Perciò

$$Re\,(iz^2 - i\bar{z}^2) = -4xy$$

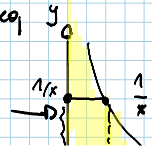
La diseq. è pertanto

$$-4xy \geq -4$$
$$\Updownarrow$$
$$-xy \geq -1$$
$$\Updownarrow$$
$$xy \leq 1$$

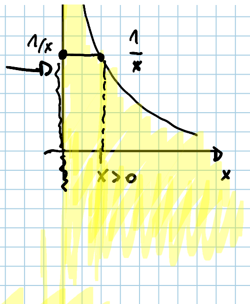
Devo capire dove sono messi $z = x + iy$ con $\boxed{xy \leq 1}$.

ORA. Se $x > 0$ trovo la diseq.

$$y \leq \frac{1}{x}$$



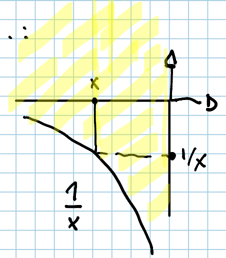
$y \le \frac{1}{x}$



Se $x = 0$ → asse delle y sono tutte soluz.

Se $x < 0$ trovo la diseq.:

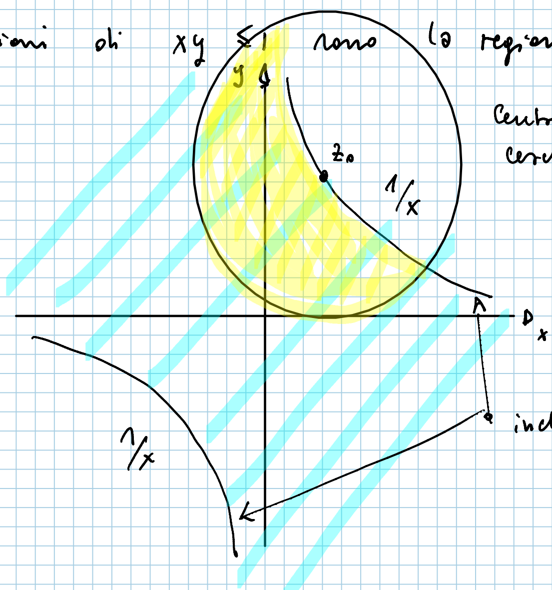
$y \ge \frac{1}{x}$



con $x < 0$

Riassumendo:

Le soluzioni di $xy \le 1$ sono la regione azzurra:



Centro del cerchio giallo

$\frac{\sqrt{2}}{2} + i\sqrt{2} = z_0$

$\underset{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad \underset{y}{\sqrt{2}}$

$x \cdot y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = 1$

inclusi

ES. 6 Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametro fissato.

Disegnare nel piano complesso il seguente insieme:

$$S_\alpha = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{\bar{z} + 1 - i\alpha}{z + 1} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sol. Devo imporre $z + 1 \neq 0$ ovvero $z \neq -1$

Dobbiamo avere:

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\bar{z} + 1 - i\alpha}{z+1} \right) = 0$$

Eseguo la divisione complessa:

$$\frac{\bar{z} + 1 - i\alpha}{z+1} \cdot \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}+1} = \frac{\bar{z}^2 + 2\bar{z} + 1 - i\alpha\bar{z} - i\alpha}{|z+1|^2} = (*)$$

Metto $z = x + iy$

$\bar{z} = x - iy$

$(\bar{z})^2 = (x - iy)^2 = x^2 - 2ixy + (-iy)^2$

$= x^2 - 2ixy - y^2$

$\boxed{\begin{aligned} &-i\alpha\bar{z} = \\ &-i\alpha(x - iy) = \\ &-i\alpha x - \alpha y \end{aligned}}$

Dunque...

Dunque

$$(\circledast) = \frac{1}{|z+1|^2}\left(x^2 - 2ixy - y^2 + 2x - 2iy + 1 - i\alpha x - \alpha y - i\alpha\right)$$

ORA:

$$\operatorname{Im}(\circledast) = 0 \iff -\overbrace{2xy - 2y} - \overbrace{\alpha x - \alpha} = 0$$

$$\iff 2y(x+1) + \alpha(x+1) = 0$$

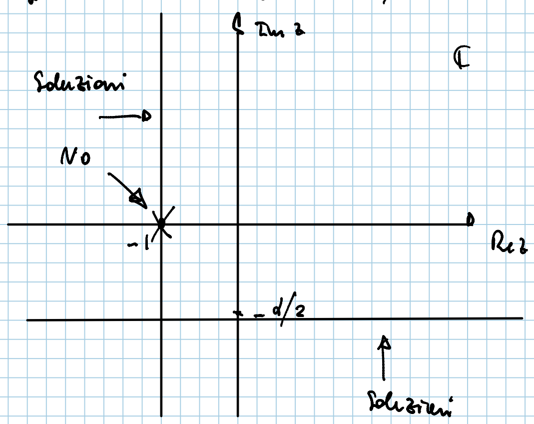
$$\iff (x+1)(2y+\alpha) = 0.$$

L'eq. è verificata se e solo se $x+1=0$ oppure $2y+\alpha=0$
("unione delle soluzioni")

ORA!

$$x+1=0 \iff x=-1$$

$$2y+\alpha=0 \iff y=-\alpha/2$$



$\square$

ES. 7 Determinare $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $z_0 = i$ sia radice del polinomio

$$P(z) = z^4 - 2z^3 + \lambda z^2 - 2z + 2.$$

Calcolare quindi tutte le radici di P.

Sol. Deve essere:

$$0 = \underset{\substack{\| \\ i}}{P(z_0)} = i^4 - 2i^3 + \lambda i^2 - 2i + 2$$

$i^2 = -1$
$i^3 = i^2 \cdot i = -i$
$i^4 = i^2 \cdot i^2 = +1$

$$= 1 - 2(-i) + \lambda(-1) - 2i + 2$$

$$= 1 + \cancel{2i} - \lambda - \cancel{2i} + 2$$

$$= 3 - \lambda$$

$\Longrightarrow \lambda = 3.$

Il polinomio è allora:

$$P(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2$$

$z_0 = i$
$z_1 = \bar{i} = -i$