Lezione 5

lunedì 13 ottobre 2014
09:57

Tutorato Canale 4

Giovedì 16.30 - 18.00

P3

ES. 7

Polinomio

$$P(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2 \qquad \lambda = 3$$

$z_0 = i$ Radice

$P(z)$ ha coeff. reali
$z_0 = i$ Radici $\Big\} \Rightarrow \bar{z_0} = -i$ è radice

$\bar{z_0} = z_1$

Se $z_2 \in \mathbb{C}$ è radice allora $z_3 = \bar{z_2}$ è radice

Sappiamo che

$$P(z) = (z - z_0)(z - \bar{z_0})(z - z_2)(z - \bar{z_2})$$
$$= (z - i)(z + i)(z - z_2)(z - \bar{z_2})$$
$$= (z^2 + \cancel{iz} - \cancel{iz} + 1)(z^2 - z\bar{z_2} - zz_2 + |z_2|^2)$$

$\forall z \in \mathbb{C}$

$$= z^4 - z^3\bar{z_2} - z^3 z_2 + z^2|z_2|^2 + z^2 - z\bar{z_2} - zz_2 + |z_2|^2$$
$$= z^4 - z^3(z_2 + \bar{z_2}) + z^2(1 + |z_2|^2) - z(z_2 + \bar{z_2}) + |z_2|^2$$

$$\begin{cases} -2 = -(z_2 + \bar{z_2}) & * \\ +3 = 1 + |z_2|^2 & \square \\ -2 = -(z_2 + \bar{z_2}) & * \\ +2 = |z_2|^2 & \square \end{cases} \qquad \begin{cases} z_2 + \bar{z_2} = 2 \\ |z_2|^2 = 2 \end{cases}$$

$z_2 = x_2 + iy_2 \Rightarrow z_2 + \bar{z_2} = 2x_2$

$\Rightarrow |z_2|^2 = x_2^2 + y_2^2$

Sost. :

$\Rightarrow \quad |z_2| = x_2 + y_2$

Sost.:

$$\begin{cases} 2x_2 = 2 \\ x_2^2 + y_2^2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = \pm 1 \end{cases}$$

Conclusione:

$$z_2 = x_2 + iy_2 = 1+i \quad \text{"+"}$$

$$z_3 = \bar{z}_2 = x_2 - iy_2 = 1-i$$

Le 4 sol. sono $z_0 = i \quad z_1 = -i \quad z_2 = 1+i \quad z_3 = 1-i$.

Conto alternativo $z-i$ e $z+i$ dividono $P(z)$

Quindi: $(z-i)(z+i) = z^2 - i^2 = z^2+1$

Eseguo la divisione

$$\begin{array}{rrrrr|l} P(z) = z^4 & -2z^3 & +3z^2 & -2z & +2 & z^2+1 \\ \hline z^4 & \dots & z^2 & \dots & \dots & z^2 - 2z + 2 \\ \hline 0 & -2z^3 & 2z^2 & -2z & +2 & \text{Quozienti} \\ & -2z^3 & \dots & -2z & & \\ \hline & 0 & 2z^2 & 0 & 2 & \\ & & 2z^2 & & 2 & \\ \hline & & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

Resto $= 0$!!

$$\sqrt{4}\sqrt{-1} = \sqrt{4\cdot(-1)} = \sqrt{-4}$$

Conclusione

$$P(z) = (z^2+1)\cdot(z^2-2z+2)$$

Risolvo l'eq.:

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \iff z_\pm = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 2}}{2}$$

$$z_\pm = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i .$$

Fine.

ES. 8 Disegnare nel piano $\mathbb{C}$ l'insieme delle soluzioni $z \in \mathbb{C}$ della diseg.:

$$(*) \quad \frac{\sqrt{4 - |z-4|}}{\sqrt{4 - |z+4i|}} > 1 .$$

Radici Reali

Soluzione.

Condizioni di esistenza:

$$\begin{cases} 4 - |z-4| \geq 0 \\ 4 - |z+4i| > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} |z-4| \leq 4 \\ |z-(-4i)| < 4 \end{cases}$$

p.ti dentro cerchio con centro 4 Raggio 4

p.ti dentro il cerchio di centro $-4i$ Raggio 4

ORA:

$$(*) \iff \sqrt{4 - |z-4|} > \sqrt{4 - |z+4i|}$$

$$\iff \cancel{4} - |z-4| > \cancel{4} - |z+4i|$$

$$\iff |z+4i| > |z-4|$$

$$\iff |z+4i|^2 > |z-4|^2$$

Continuo con: $z = x + iy$

$$|z+4i|^2 = |x+iy+4i|^2 = |x+i(y+4)|^2$$

$$= x^2 + (y+4)^2$$

$$= x^2 + y^2 + 8y + 16$$

$$|z-4|^2 = |x+iy-4|^2 = |(x-4)+iy|^2$$
$$= (x-4)^2 + y^2$$
$$= x^2 - 8x + 16 + y^2$$

Sost. sopra

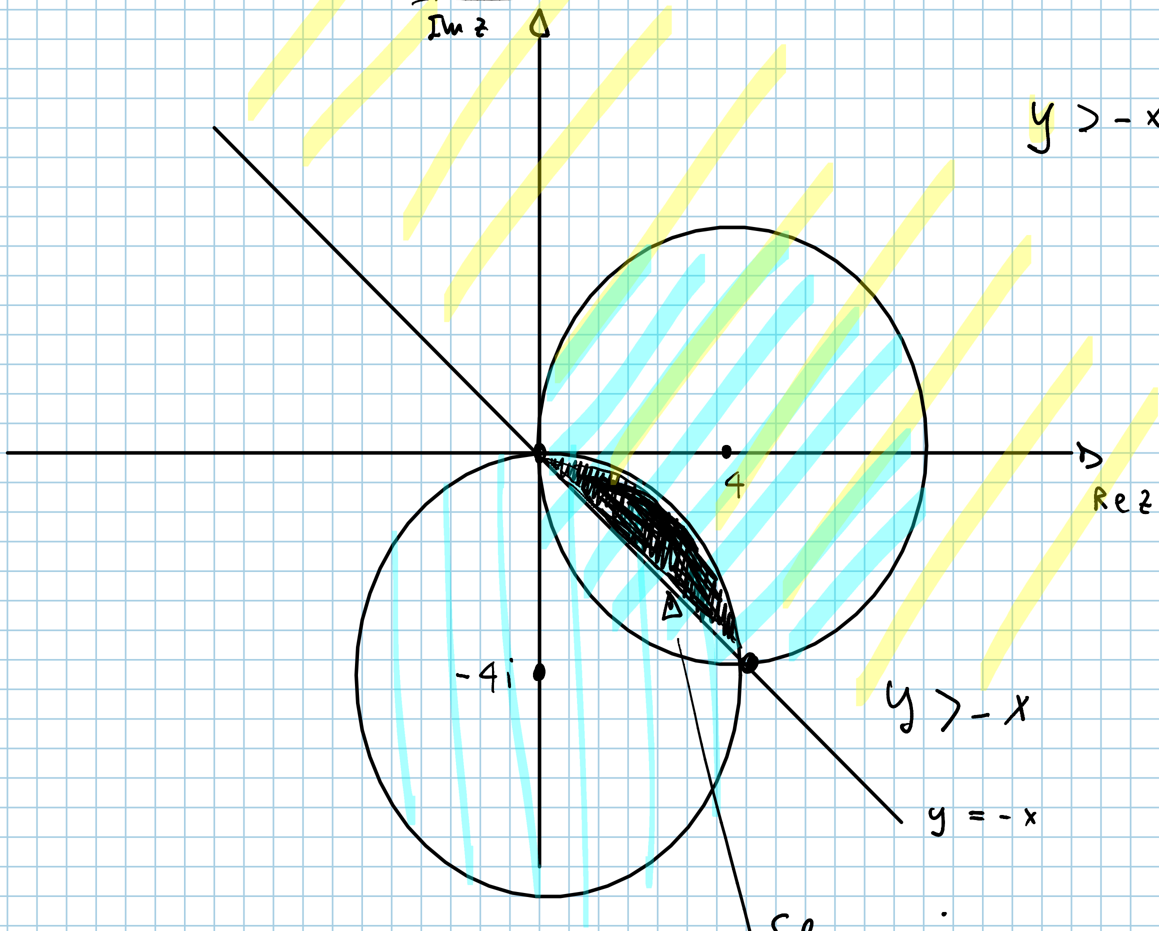
$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 8y + \cancel{16} > \cancel{x^2} - 8x + \cancel{16} + \cancel{y^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{y > -x}$$

$y = -x$

$y > -x$



Soluzioni.
Bordo Escluso

SUCCESSIONI NUMERICHE

Una successione numerica è una funzione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
Indicheremo con $a_n = a(n)$, $n \in \mathbb{N}$, il termine n-esimo della successione.
Una successione si indica col simbolo $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e si può rappresentare anche con l'elenco ordinato dei suoi termini.

Ad esempio la succ. $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, è formata dagli elementi

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots .$$

DEF Diciamo che una succ. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ad un limite finito $L \in \mathbb{R}$, detto il limite della successione, se

■ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$, $n \in \mathbb{N}$ si ha $|a_n - L| < \varepsilon$.

Diremo in questo caso che la succ. è convergente e scriveremo:

$$L = \lim_{n \to \infty} a_n \quad \text{o anche} \quad a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} L \in \mathbb{R} .$$

Commento: La verifica di un limite con la definizione consiste nello studio di una disequazione con parametro.

Esempio Verifico con la definizione che

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Verifica: Fisso $\varepsilon > 0$ e cerco $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$ si abbia:

$$= \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$= \left| \frac{\cancel{n} - \cancel{n} - 1}{n+1} \right|$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n+1$$

$$\iff \frac{1}{\varepsilon} - 1 < n$$

Per la proprietà di Archimede $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\bar{n} > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

Ma allora se $n \geq \bar{n}$ avremo

$$\forall\, n \geq \bar{n} > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \implies \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon .$$

Proposizione (Unicità del limite) Se una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ha limite allora questo limite è unico.

Dim. Siano $L, M \in \mathbb{R}$ due limiti
Per definizione: $\forall \varepsilon > 0 \;\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$ si avrà

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad e \quad |a_n - M| < \varepsilon .$$

Allora:

$$|L - M| = |(L - a_n) + (a_n - M)| \leq \underbrace{|L - a_n|}_{<\,\varepsilon} + \underbrace{|a_n - M|}_{<\,\varepsilon} \leq$$

se $n \geq \bar{n}$

$$|L-M| = |(L-a_n)+(a_n-M)| \leq |L-a_n| + |a_n - M| \leq$$

$$< 2\varepsilon$$

Ovvero: $0 \leq |L-M| < 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \implies |L-M| = 0$

$$\Downarrow$$

$$L = M.$$

"più infinito"

DEF Diremo che una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞ se

$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$ si ha $a_n \geq M$.

Scriveremo in questo caso:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Analogamente:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \overset{DEF}{\iff} \forall M \in \mathbb{R} \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n \geq \bar{n} \text{ si ha } a_n \leq M.$$

Delle successioni che non rientrano nei casi precedenti diremo che <u>NON</u> hanno limite (né finito né $\pm\infty$).

Def Una succ. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice <u>limitata</u> se esiste una costante $C > 0$ tale che

$$|a_n| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prop Se una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (ad un $L \in \mathbb{R}$) allora è limitata.

Prova Fisso $\varepsilon = 1$ nel def. di limite e trovo $\bar{n} \in \mathbb{N}$

tale che

$$|a_n - L| \leq \varepsilon = 1 \qquad \forall n \geq \bar{n}$$

Quindi $\qquad \forall n \geq \bar{n}$

$$|a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| \leq$$
$$\leq \underbrace{1 + |L|}$$

ORA, definita la costante

$$C = \underbrace{|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{\bar{n}}|} + \underbrace{1 + |L|} < \infty$$

avremo

$$|a_n| \leq C \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\blacksquare$

<u>TEOR</u> (Operazioni coi limiti)

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni convergenti in $\mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = M \in \mathbb{R}.$$

Allora:

(1) La succ. $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = L + M = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

(2) La succ. $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = L \cdot M$$

(3) Se $M \neq 0$ allora $\left(a_n / b_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge e

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{M} \in \mathbb{R} .$$

Prova Verifico la (2). Fissato $\varepsilon > 0$ vorrei avere

$$|a_n b_n - LM| < \varepsilon \qquad \forall n \geq \bar{n}$$

Conti:

$$|a_n b_n - LM| = |a_n b_n - \underline{a_n M} + \underline{a_n M} - LM|$$

$$= |a_n (b_n - M) + M (a_n - L)|$$

$$\leq |a_n (b_n - M)| + |M (a_n - L)| =$$

$$= \underline{\underline{|a_n|}} \, |b_n - M| + |M| \, |a_n - L|$$

MA! $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge $\Rightarrow$ è limitata:

$$\exists C \quad |a_n| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dunque

$$|a_n b_n - LM| \leq C \, |b_n - M| + |M| \, |a_n - L|$$

So che dato $\varepsilon > 0$ $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\underline{\underline{\forall n \geq \bar{n}}}$

$$|b_n - M| < \varepsilon$$

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

Conclusione:

$$|a_n b_n - LM| \leq C \varepsilon + |M| \varepsilon = (C + |M|) \varepsilon$$

FINE.