Lezione 6

mercoledì 15 ottobre 2014
09:13

TEOREMA (del confronto) Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tre successioni tali che

$$a_n \leq b_n \leq c_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} .$$

Se esistono e sono uguali i limiti

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$$

allora si ha anche

$$L = \lim_{n\to\infty} b_n .$$

Dim. Fissato $\varepsilon > 0$, per ipotesi esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$ si ha:

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

$$|c_n - L| < \varepsilon$$

Ovvero equivalentemente

$$-\varepsilon < a_n - L < \varepsilon ,$$

$$-\varepsilon < c_n - L < \varepsilon .$$

In conclusione $a_n \leq b_n$ $\quad b_n \leq c_n$

$$-\varepsilon < a_n - L \leq b_n - L \leq c_n - L < \varepsilon$$

Ovvero:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n}$: $\quad |b_n - L| < \varepsilon \qquad \forall n \geq \bar{n}$

cioè: $\quad \lim_{n\to\infty} b_n = L$ $\qquad \square$

Osservazioni:

(1) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima cioè $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una succ. limitata, allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$$

infinitesimo · limitato = infinitesimo

(2) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è infinita cioè $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifica $b_n \geq \delta > 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = +\infty$$

(3) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verificano

$$\left.\begin{array}{l} a_n \leq b_n \quad \forall n \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} a_n \leq b_n \quad \forall n\in\mathbb{N} \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty .$$

(4) Si ha:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \\ \text{e } b_n \geq M \quad \forall n \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n + b_n = +\infty .$$

ESEMPI ELEMENTARI

ES. 1 (Quoziente di polinomi) Siano

$$P(x) = a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \dots + a_1 x + a_0 \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

$$Q(x) = b_q x^q + b_{q-1} x^{q-1} + \dots + b_1 x + b_0 \qquad b_i \in \mathbb{R}$$

due polinomi di grado p e q. Quindi $a_p \neq 0$ e $b_q \neq 0$.
Per chiarezza: $a_p > 0$ e $b_q > 0$.

Allora:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \dots + b_1 n + b_0} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n^p}{n^q} \cdot \frac{a_p + a_{p-1} \cdot \frac{1}{n} + a_{p-2} \frac{1}{n^2} + \dots + a_1 \frac{1}{n^{p-1}} + a_0 \frac{1}{n^p}}{b_q + b_{q-1} \frac{1}{n} + b_{q-2} \frac{1}{n^2} + \dots + b_1 \frac{1}{n^{q-1}} + b_0 \frac{1}{n^q}}$$

$$= \left(\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^{q-p}} \right) \cdot \frac{a_p}{b_q}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{a_p}{b_q} & p = q \\ +\infty & p > q \\ 0 & p < q \end{cases}$$

ES 2 (Successione geometrica). Sia $q \in \mathbb{R}$ fissato la "ragione" della progressione. Allora:

$$\lim_{n \to \infty} q^n = \begin{cases} 1 & q = 1 \\ \text{non esiste} & q = -1 \\ 0 & -1 < q < 1 \\ +\infty & q > 1 \end{cases}$$

$n \to \infty$

$$\begin{cases} 0 & \square \quad -1 < q < 1 \\ +\infty & \circledast \quad q > 1 \\ \text{non esiste} & \quad q < -1 \end{cases}$$

Provo $\circledast$. Avremo $q = 1 + x$ con $x > 0$ perché $q > 1$.
Allora:

$$q^n = (1+x)^n \overset{\text{dis. Bernoulli}}{\geq} 1 + nx \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

$x \geq -1$ $\quad n \to +\infty$, $x > 0$

Per confronto deduco che

$$\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$$

Caso $0 < q < 1$ ... per esercizio.
Poi guarderemo anche $-1 < q < 0$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$

ES. 3 (Radice n-esima) Sia $p > 0$ un numero positivo fissato. Allora

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1.$$

Considero il caso $p > 1$. Allora

$$\sqrt[n]{p} = 1 + a_n \quad \text{con } a_n > 0.$$

Allora

$$p = (1 + a_n)^n \geq 1 + n a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$a_n > 0$

Trovo

$$0 < a_n \leq \frac{p-1}{n}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow_{n\to\infty} \qquad \downarrow_{n\to\infty}$$

$$0 \qquad 0 \qquad 0$$

Per il Teorema del Confronto

Per il Teorema

del Confronto

Conclusione:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = \lim_{n\to\infty} (1+a_n) = 1.$$

Se poi $0<p<1$ allora

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{p}}} = 1.$$

$\frac{1}{p} > 1$ $\quad \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ visto sopra

<u>Es. 4</u> Affermo che $\forall \beta > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\beta} = 1.$$

Provo per $\beta = 1$. Cioè: devo provare che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Faccio così:

$$\to \sqrt[n]{\sqrt{n}} = 1 + a_n \quad \text{con} \quad a_n > 0.$$

Allora:

Bernoulli

$$\sqrt{n} = (1+a_n)^n \geq 1 + n a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Da cui

$$0 < a_n \leq \frac{\sqrt{n}-1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}$$

$0 \to 0$, $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Per il Teor. Confronto

Conclusione
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} (1+a_n)^2 = 1.$$

ES. 5 (Confronto fra potenze ed esponenziali)

Siano $a, \beta \in \mathbb{R}$ due numeri tali che: $a > 1$ e $\beta > 0$

Allora
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\beta}{a^n} = 0.$$

Prova Considero la succ.
$$b_n = \frac{n^\beta}{a^n} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

e studio il rapporto
$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^\beta}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n^\beta} = \frac{a^n}{a^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^\beta}{n^\beta} =$$
$$= \frac{1}{a}\left(\frac{n+1}{n}\right)^\beta = \frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta$$

Quindi
$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{a} < 1 \quad \text{perché} \quad a > 1.$$

Prendo a piacere $\frac{1}{a} < q < 1$. Allora dalla DEF di limite segue che $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$ si avrà
$$\boxed{\frac{b_{n+1}}{b_n} \leq q} \qquad \forall n \geq \bar{n}.$$

Moltiplico per b_n e trovo

riscrivo per n e trovo

$$b_{n+1} \le q\, b_n \qquad \forall n \ge \bar n$$

$$b_n \le q \cdot b_{n-1}$$

$$b_{n-1} \le q\, b_{n-2}$$

Trovo

$$\begin{aligned} b_{n+1} &\le q\, b_n \le q \cdot q\, b_{n-1} = q^2 b_{n-1} \\ &\le q^2 \cdot q \cdot b_{n-2} = q^3 \cdot b_{n-3} \\ &\;\;\vdots \\ &\le q^{n-\bar n}\, b_{\bar n} = q^n \cdot \frac{b_{\bar n}}{q^{\bar n}} \end{aligned}$$

Ricopio

$$0 < b_{n+1} \le q^n \cdot \frac{b_{\bar n}}{q^{\bar n}} \qquad q < 1$$

per $n \to \infty$: $0 \to 0$, $b_{n+1} \to 0$, $q^n \to 0$, $q^n \cdot \frac{b_{\bar n}}{q^{\bar n}} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Teor. Confronto.

Conclusione:

$$0 = \lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n^\beta}{a^n}. \qquad \square$$

Esponenziale con base >1 BATTE tutte le potenze.

ES. 6 (Confronto fra esponenziale e fattoriale)

Sia $a \in \mathbb{R}$ un numero reale positivo: $a > 0$. $(a > 1)$

Allora

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = \text{Conti fatti alla lavagna in classe}$$

ES. 7 Vedi Appunti