ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione, Canali 2, 3, 4

Appello del 26.01.2015

TEMA 1

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = |x+1|\, e^{\frac{-1}{|x+3|}}\,.$$

(a) Determinare il dominio D di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; studiarne la continuità e gli eventuali prolungamenti per continuità;
(b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f';
(c) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento. (a) $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -3\}$. Si ha:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x\to+\infty} f(x)\\
&\lim_{x\to-3} f(x) = 0,
\end{aligned}$$

per cui f è prolungabile ad una funzione continua in tutto $\mathbb{R}$ ponendo $f(-3) = 0$.
Asintoti obliqui:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)e^{\frac{-1}{x+3}}}{x} = 1\\
\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{(-x-1)e^{\frac{1}{x+3}}}{x} = -1.
\end{aligned}$$

Per i termini noti:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - x\big) &= \lim_{x\to+\infty} \Big[x\big(e^{\frac{-1}{x+3}} - 1\big) + e^{\frac{-1}{x+3}}\Big] = \lim_{x\to+\infty} \Big[\frac{-x}{x+3} + o(1) + e^{\frac{-1}{x+3}}\Big]\\
&= -1 + 1 = 0\\
\lim_{x\to-\infty} \big(f(x) + x\big) &= \lim_{x\to-\infty} \Big[-x\big(e^{\frac{1}{x+3}} - 1\big) - e^{\frac{1}{x+3}}\Big] = \lim_{x\to-\infty} \Big[\frac{-x}{x+3} + o(1) - e^{\frac{1}{x+3}}\Big]\\
&= -2,
\end{aligned}$$

per cui $y = x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$ e $y = -x-2$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.
(b) Si possono applicare le regole di derivazione per $x \neq -1, -3$. Si ha

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)e^{\frac{-1}{x+3}} & \text{per } x > -1\\ (-x-1)e^{\frac{-1}{x+3}} & \text{per } -3 < x < -1\\ (-x-1)e^{\frac{1}{x+3}} & \text{per } x < -3, \end{cases}$$

quindi

$$f'(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x+3}}\big(1 + \frac{x+1}{(x+3)^2}\big) = e^{\frac{-1}{x+3}}\,\frac{x^2+7x+10}{(x+3)^2} & \text{per } x > -1\\ e^{\frac{-1}{x+3}}\big(-1 + \frac{-x-1}{(x+3)^2}\big) = -e^{\frac{-1}{x+3}}\,\frac{x^2+7x+10}{(x+3)^2} & \text{per } -3 < x < -1\\ e^{\frac{1}{x+3}}\big(-1 - \frac{-x-1}{(x+3)^2}\big) = -e^{\frac{1}{x+3}}\,\frac{x^2+5x+8}{(x+3)^2} & \text{per } x < -3. \end{cases}$$

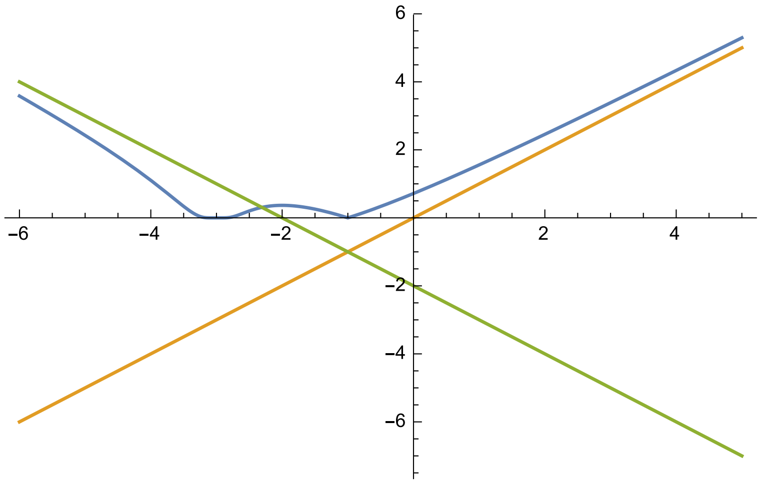

Figura 1: Il grafico di f (Tema 1).

Gli zeri di $x^2+7x+10$ sono -5 e -2, mentre x^2+5x+8 non ha zeri. Quindi f è strettamente decrescente per $x<-3$, è strettamente crescente per $-3<x<-2$, è strettamente decrescente per $-2<x<-1$ ed è strettamente crescente per $x>-1$. In particolare $-3,-1$ sono i punti di minimo assoluto (ovvio, perché $f(x)\ge 0$ per ogni x) e $x=-2$ è un massimo locale stretto, con $f(-2)=1/e$.
I limiti significativi di f' sono

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-3} f'(x)=0 \qquad (\text{dal limite fondamentale } \lim_{x\to 0} e^{-1/x^2}/x^2=0)\\
&\lim_{x\to-1^-} f'(x)=-e^{-1/2}\\
&\lim_{x\to-1^+} f'(x)=e^{-1/2}.
\end{aligned}$$

Dunque l'estensione continua di f è derivabile in $x=-3$, mentre $x=-1$ è un punto angoloso.
(c) Il grafico di f è in Figura 1.

Esercizio 2 Determinare tutti gli $x\in\mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log n}{n-1}(x-2)^n$$

converga, risp. converga assolutamente.
Svolgimento. Il criterio asintotico del rapporto dà

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{n}\frac{n-1}{\log n}|x-2|=\lim_{n\to\infty}\frac{\log n+\log(1+1/n)}{\log n}\frac{n-1}{n}|x-2|=|x-2|.$$

Pertanto la serie converge assolutamente, e quindi converge, se $|x-2|<1$, cioè se $1<x<3$, mentre il termine generale non è infinitesimo per $x<1$ o per $x>3$ e quindi per tali x la serie diverge assolutamente e non converge. Per $x=1,3$ il criterio asintotico del rapporto non dà informazioni.
Per $x=1$ la serie diventa

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\log n}{n-1},$$

che è a termini di segno alterno. Poniamo $a_n=\frac{\log n}{n-1}$ e $f(x)=\frac{\log x}{x-1}$. Per un limite fondamentale si ha che $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. Inoltre $f'(x)=\frac{1-1/x-\log x}{(x-1)^2}$, che è visibilmente <0 per $x>2$. Per il teorema di Leibniz, la serie converge. Per quanto riguarda la convergenza assoluta, osserviamo che per $x = 1$ e per $x = 3$ questa significa la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n.$$

Siccome $a_n \geq 1/(n-1)$ per ogni $n \geq 2$ e la serie armonica diverge, per il criterio del confronto la serie diverge.

Esercizio 3 Calcolare

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \big(\sin^2 x + 3\big) e^{2\cos x} |\sin x|\, dx.$$

Svolgimento. L'integrando è una funzione pari e l'intervallo d'integrazione è simmetrico, per cui si ha

$$I := \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \big(\sin^2 x + 3\big) e^{2\cos x} |\sin x|\, dx = 2\int_0^{\pi/2} \big(\sin^2 x + 3\big) e^{2\cos x} \sin x\, dx.$$

Calcoliamo separatamente due primitive. Si ha:

$$\begin{aligned}
\int e^{2\cos x} \sin x\, dx &= -\frac{1}{2} e^{2\cos x} =: F_1(x)\\
\int e^{2\cos x} \sin^3 x\, dx &= \text{(per parti)} \quad -\frac{1}{2} e^{2\cos x} \sin^2 x + \int e^{2\cos x} \sin x \cos x\, dx\\
&= \text{(ancora per parti)} \quad -\frac{1}{2} e^{2\cos x} \sin^2 x - \frac{1}{2} e^{2\cos x} \cos x - \frac{1}{2}\int e^{2\cos x} \sin x\, dx\\
&= -\frac{1}{2} e^{2\cos x} \sin^2 x - \frac{1}{2} e^{2\cos x} \cos x + \frac{1}{4} e^{2\cos x}\\
&= \frac{1}{4} e^{2\cos x}\big(1 - 2\cos x - 2\sin^2 x\big) =: F_2(x).
\end{aligned}$$

Quindi

$$I = 2\big(3F_1(x) + F_2(x)\big)\big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{27}\big(13e^3 - 16\big).$$

Esercizio 4 Si consideri la funzione

$$f(z) = i\bar{z}^3 - 3 + i, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss gli insiemi

$$\begin{aligned}
A &= \big\{f(z) : z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}\,(z) = 0\big\},\\
B &= \big\{z \in \mathbb{C} : f(z) = i - 11\big\}.
\end{aligned}$$

Svolgimento. Si ha:

$$\begin{aligned}
A &= \{i(\bar{iy})^3 - 3 + i : y \in \mathbb{R}\} = \{i(-\bar{i}y^3) - 3 + i : y \in \mathbb{R}\}\\
&= \{iiy^3 - 3 + i : y \in \mathbb{R}\} = \{-y^3 - 3 + i : y \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

L'insieme A è quindi una retta parallela all'asse delle ascisse $\mathrm{Im}\, z = 1$.
Si ha inoltre:

$$\begin{aligned}
B &= \{z : i\bar{z}^3 - 3 + i = i - 11\} = \{z : \bar{z}^3 = 8i\}\\
&= \{z : z^3 = -8i\} = \{z : z^3 = 8e^{3\pi i/2}\}\\
&= \{2e^{i\pi/2}, 2e^{7\pi i/6}, 2e^{11\pi i/6}\} = \{2i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} - i\}.
\end{aligned}$$

Esercizio 5 [facoltativo] Sia
$$f(x) = \int_{x^2}^{2x^2} \frac{e^t - 1}{t}\, dt.$$
Dimostrare che $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e calcolare l'ordine di infinitesimo di f.

Svolgimento. Per il teorema della media integrale, per ogni x esiste $t_x \in [x^2, 2x^2]$ tale che $f(x) = x^2 \frac{e^{t_x}-1}{t_x}$. Siccome $t_x \to 0$, per il teorema sul cambio di variabili nei limiti si ha che $\frac{e^{t_x}-1}{t_x} \to 1$. Quindi $f(x) \sim x^2$ per $x \to 0$.

TEMA 2

Esercizio 1 Si consideri la funzione
$$f(x) = -|x-3|\, e^{\frac{-1}{|x-1|}}\ .$$
(a) Determinare il dominio D di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; studiarne la continuità e gli eventuali prolungamenti per continuità;
(b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f';
(c) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento. (a) $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$. Si ha:
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty = \lim_{x\to+\infty} f(x)$$
$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0,$$
per cui f è prolungabile ad una funzione continua in tutto $\mathbb{R}$ ponendo $f(1) = 0$.
Asintoti obliqui:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(3-x)e^{\frac{-1}{x-1}}}{x} = -1$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x-3)e^{\frac{1}{x-1}}}{x} = 1.$$
Per i termini noti:
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \big(f(x)+x\big) &= \lim_{x\to+\infty} \Big[-x\big(e^{\frac{-1}{x-1}}-1\big) + 3e^{\frac{-1}{x-1}}\Big] = \lim_{x\to+\infty} \Big[\frac{x}{x-1} + o(1) + 3e^{\frac{-1}{x-1}}\Big] \\
&= 1 + 3 = 4 \\
\lim_{x\to-\infty} \big(f(x)-x\big) &= \lim_{x\to-\infty} \Big[x\big(e^{\frac{1}{x-1}}-1\big) - 3e^{\frac{1}{x-1}}\Big] = \lim_{x\to-\infty} \Big[\frac{x}{x-1} + o(1) - 3e^{\frac{1}{x-1}}\Big] \\
&= -2,
\end{aligned}$$
per cui $y = -x + 4$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$ e $y = x - 2$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.
(b) Si possono applicare le regole di derivazione per $x \neq 1, 3$. Si ha
$$f(x) = \begin{cases} (3-x)e^{\frac{-1}{x-1}} & \text{per } x > 3 \\ (x-3)e^{\frac{-1}{x-1}} & \text{per } 1 < x < 3 \\ (x-3)e^{\frac{1}{x-1}} & \text{per } x < 1, \end{cases}$$

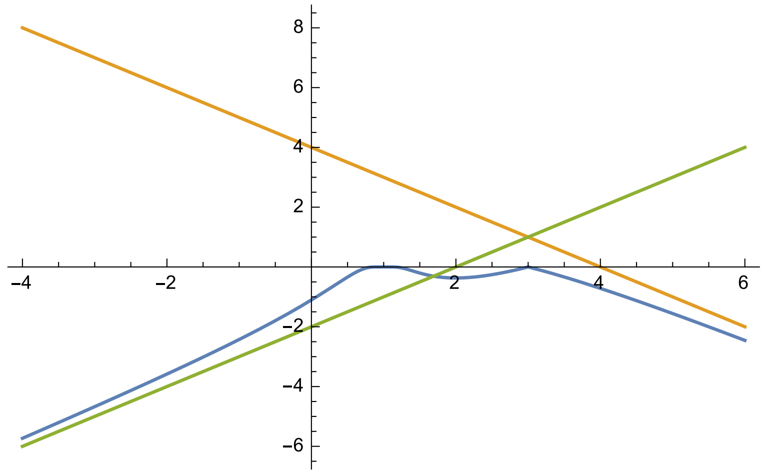

Figura 2: Il grafico di f (Tema 2).

quindi

$$f'(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x-1}}\left(-1+\frac{3-x}{(x-1)^2}\right) = e^{\frac{-1}{x-1}}\frac{-x^2+x+2}{(x-1)^2} & \text{per } x>3 \\ e^{\frac{-1}{x-1}}\left(1+\frac{x-3}{(x-1)^2}\right) = -e^{\frac{-1}{x-1}}\frac{-x^2+x+2}{(x-1)^2} & \text{per } 1<x<3 \\ e^{\frac{1}{x-1}}\left(1-\frac{x-3}{(x-1)^2}\right) = e^{\frac{1}{x-1}}\frac{x^2-3x+4}{(x-1)^2} & \text{per } x<1. \end{cases}$$

Gli zeri di $-x^2+x+2$ sono -1 e 2, mentre x^2-3x+4 non ha zeri. Quindi f è strettamente crescente per $x<1$, è strettamente decrescente per $1<x<2$, è strettamente crescente per $2<x<3$ ed è strettamente decrescente per $x>3$. In particolare $1,3$ sono i punti di massimo assoluto (ovvio, perché $f(x)\le 0$ per ogni x) e $x=2$ è un minimo locale stretto, con $f(2)=1/e$.
I limiti significativi di f' sono

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 1} f'(x) = 0 \qquad \left(\text{dal limite fondamentale } \lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}}{x^2}=0\right) \\ &\lim_{x\to 3^-} f'(x) = e^{-1/2} \\ &\lim_{x\to 3^+} f'(x) = -e^{-1/2}. \end{aligned}$$

Dunque l'estensione continua di f è derivabile in $x=1$, mentre $x=3$ è un punto angoloso.
(c) Il grafico di f è in Figura 2.

Esercizio 2 Determinare tutti gli $x\in\mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+\log n}{n}(x+1)^n$$

converga, risp. converga assolutamente.
Svolgimento. Il criterio asintotico del rapporto dà

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\log(n+1)}{n+1}\,\frac{n-1}{1+\log n}|x+1| = |x+1|.$$

Pertanto la serie converge assolutamente, e quindi converge, se $|x+1|<1$, cioè se $-2<x<0$, mentre il termine generale non è infinitesimo per $x<-2$ o per $x>0$ e quindi per tali x la serie diverge assolutamente

e non converge. Per $x = -2, 0$ il criterio asintotico del rapporto non dà informazioni.
Per $x = -2$ la serie diventa

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1 + \log n}{n},$$

che è a termini di segno alterno. Poniamo $a_n = \frac{1+\log n}{n}$ e $f(x) = \frac{1+\log x}{x}$. Per un limite fondamentale si ha che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Inoltre $f'(x) = \frac{1-x-x\log x}{x^2}$, che è visibilmente < 0 per $x > 2$. Per il teorema di Leibniz, la serie converge. Per quanto riguarda la convergenza assoluta, osserviamo che per $x - 2$ e per $x = 0$ questa significa la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n.$$

Siccome $a_n \geq 1/n$ per ogni $n \geq 2$ e la serie armonica diverge, per il criterio del confronto la serie diverge.

Esercizio 3 Calcolare

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \big(\cos^2 x + 1\big) e^{3|\sin x|} \cos x \, dx.$$

Svolgimento. L'integrando è una funzione pari e l'intervallo d'integrazione è simmetrico, per cui si ha

$$I := \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \big(\cos^2 x + 1\big) e^{3|\sin x|} \cos x \, dx = 2 \int_0^{\pi/2} \big(\cos^2 x + 1\big) e^{3\sin x} \cos x \, dx.$$

Calcoliamo separatamente due primitive. Si ha:

$$\begin{aligned}
&\int e^{3\sin x} \cos x \, dx = \frac{1}{3} e^{3\sin x} =: F_1(x) \\
&\int e^{3\sin x} \cos^3 x \, dx = \text{(per parti)} \;\; \frac{1}{3} e^{3\sin x} \cos^2 x + \frac{2}{3} \int e^{3\sin x} \cos x \sin x \, dx \\
&\qquad = \text{(ancora per parti)} \;\; \frac{1}{3} e^{3\sin x} \cos^2 x + \frac{2}{3} \Big(\frac{1}{3} e^{3\sin x} \sin x - \frac{1}{3} \int e^{3\sin x} \cos x \, dx \Big) \\
&\qquad = \frac{1}{3} e^{3\sin x} \cos^2 x + \frac{2}{9} e^{3\sin x} \sin x - \frac{2}{27} e^{3\sin x} \\
&\qquad = \frac{1}{27} e^{3\sin x} \big(-2 + 6\sin x + 9\cos^2 x \big) =: F_2(x).
\end{aligned}$$

Quindi

$$I = 2\big(F_1(x) + F_2(x)\big)\big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{27}\big(4e^3 - 7\big).$$

Esercizio 4 Si consideri la funzione

$$f(z) = i\bar{z}^3 + 1 - 2i, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss gli insiemi

$$\begin{aligned}
A &= \big\{ f(z) : z \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}\,(z) = 0 \big\}, \\
B &= \big\{ z \in \mathbb{C} : f(z) = 9 - 2i \big\}.
\end{aligned}$$

Svolgimento. Si ha:

$$\begin{aligned}
A &= \{ i\bar{x}^3 + 1 - 2i : x \in \mathbb{R} \} = \{ ix^3 + 1 - 2i : x \in \mathbb{R} \} \\
&= \{ 1 + i(x^3 - 2) : x \in \mathbb{R} \}.
\end{aligned}$$

L'insieme A è quindi una retta parallela all'asse delle ordinate $\operatorname{Re} z = 1$.
Si ha inoltre:

$$\begin{aligned} B &= \{z : i\bar{z}^3 + 1 - 2i = 9 - 2i\} = \{z : \bar{z}^3 = -8i\} \\ &= \{z : z^3 = 8i\} = \{z : z^3 = 8e^{i\pi/2}\} \\ &= \{2e^{i\pi/6}, 2e^{5\pi i/6}, 2e^{3\pi i/2}\} = \{\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i, -2i\}. \end{aligned}$$

Esercizio 5 [facoltativo] Sia

$$f(x) = \int_{x^2}^{2x^2} \frac{e^t - 1}{t}\, dt.$$

Dimostrare che $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e calcolare l'ordine di infinitesimo di f.
Svolgimento. V. Tema 1.

TEMA 3

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = |x + 3|\, e^{\frac{-1}{|x+1|}}\, .$$

(a) Determinare il dominio D di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; studiarne la continuità e gli eventuali prolungamenti per continuità;
(b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f';
(c) disegnare un grafico qualitativo di f.
Svolgimento.
(a) $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\}$. Si ha:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x\to+\infty} f(x) \\ &\lim_{x\to-1} f(x) = 0, \end{aligned}$$

per cui f è prolungabile ad una funzione continua in tutto $\mathbb{R}$ ponendo $f(-1) = 0$.
Asintoti obliqui:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+3)e^{\frac{-1}{x+1}}}{x} = 1 \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{(-x-3)e^{\frac{1}{x+1}}}{x} = -1. \end{aligned}$$

Per i termini noti:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - x\big) &= \lim_{x\to+\infty} \Big[x\big(e^{\frac{-1}{x+1}} - 1\big) + 3e^{\frac{-1}{x+1}}\Big] = \lim_{x\to+\infty} \Big[\frac{-x}{x+1} + o(1) + 3e^{\frac{-1}{x+1}}\Big] \\ &= -1 + 3 = 2 \\ \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) + x\big) &= \lim_{x\to-\infty} \Big[-x\big(e^{\frac{1}{x+1}} - 1\big) - 3e^{\frac{1}{x+1}}\Big] = \lim_{x\to-\infty} \Big[\frac{-x}{x+1} + o(1) - 3e^{\frac{1}{x+1}}\Big] \\ &= -4, \end{aligned}$$

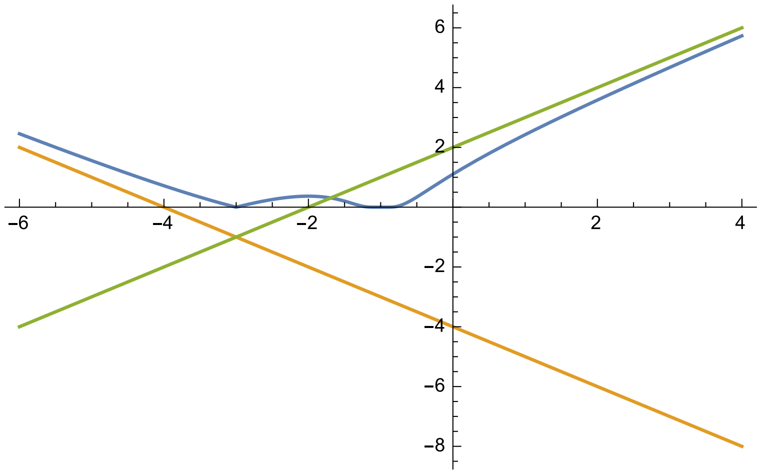

Figura 3: Il grafico di f (Tema 3).

per cui $y = x + 2$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$ e $y = -x - 4$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.
(b) Si possono applicare le regole di derivazione per $x \neq -1, -3$. Si ha

$$f(x) = \begin{cases} (x+3)e^{\frac{-1}{x+1}} & \text{per } x \geq -1 \\ (x+3)e^{\frac{1}{x+1}} & \text{per } -3 < x < -1 \\ (-x-3)e^{\frac{1}{x+1}} & \text{per } x \leq -3, \end{cases}$$

quindi

$$f'(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x+1}}\left(1 + \frac{x+3}{(x+1)^2}\right) & \text{per } x > -1 \\ e^{\frac{1}{x+1}}\left(1 - \frac{x+3}{(x+1)^2}\right) = e^{\frac{1}{x+1}}\frac{x^2+x-2}{(x+1)^2} & \text{per } -3 < x < -1 \\ e^{\frac{1}{x+1}}\left(-1 - \frac{-x-3}{(x+1)^2}\right) & \text{per } x < -3. \end{cases}$$

Si noti che $f'(x)$ è ovviamente positiva per $x > -1$ e negativa per $x < -3$. Gli zeri di $x^2 + x - 2$ sono 1 e -2. Quindi f è strettamente decrescente per $x < -3$, è strettamente crescente per $-3 < x < -2$, è strettamente decrescente per $-2 < x < -1$ ed è strettamente crescente per $x > -1$. In particolare $-3, -1$ sono i punti di minimo assoluto (ovvio, perché $f(x) \geq 0$ per ogni x) e $x = -2$ è un massimo locale stretto, con $f(-2) = 1/e$.
I limiti significativi di f' sono

$$\lim_{x\to -1} f'(x) = 0 \qquad \text{(dal limite fondamentale } \lim_{x\to 0} e^{-1/x^2}/x^2 = 0\text{)}$$
$$\lim_{x\to -3^-} f'(x) = -e^{-1/2}$$
$$\lim_{x\to -3^+} f'(x) = e^{-1/2}.$$

Dunque l'estensione continua di f è derivabile in $x = -1$, mentre $x = -3$ è un punto angoloso.
(c) Il grafico di f è in Figura 3.

Esercizio 2 Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1 - \log n}{2 - n}(x+2)^n$$

converga, risp. converga assolutamente.

Svolgimento. Si noti che $\frac{1-\log n}{2-n} = \frac{\log n - 1}{n-2} > 0$ per $n \geq 3$ Il criterio asintotico del rapporto dà

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)-1}{(n+1)-2}\frac{n-2}{\log n - 1}|x+2| = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)-1}{\log n - 1}\frac{n-2}{n-1}|x+2| = |x+2|.$$

Pertanto la serie converge assolutamente, e quindi converge, se $|x+2| < 1$, cioè se $-3 < x < -1$, mentre il termine generale non è infinitesimo per $x < -3$ o per $x > -1$ e quindi per tali x la serie diverge assolutamente e non converge. Per $x = -3, -1$ il criterio asintotico del rapporto non dà informazioni. Per $x = -1$ la serie diventa

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1-\log n}{2-n}.$$

Siccome $\frac{\log n-1}{n-2} \geq 1/(n-2)$ per ogni $n \geq 3$ e la serie armonica diverge, per il criterio del confronto la serie diverge. Per $x = -3$ la serie diventa

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1-\log n}{2-n}(-1)^n,$$

che è a termini di segno alterno. Poniamo $a_n = \frac{\log n-1}{n-2}$ e $f(x) = \frac{\log x-1}{x-2}$. Per un limite fondamentale si ha che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Inoltre $f'(x) = \frac{2-2/x-\log x}{(x-2)^2}$, che è visibilmente < 0 per $x > 9$. Per il teorema di Leibniz, la serie converge. Per quanto riguarda la convergenza assoluta, la serie diventa come nel caso $x = -1$ e quindi diverge assolutamente.

Esercizio 3 Calcolare

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(2-\sin^2 x\right)e^{-\cos x}|\sin x|\,dx.$$

Svolgimento.

L'integrando è una funzione pari e l'intervallo d'integrazione è simmetrico, per cui si ha

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(2-\sin^2 x\right)e^{-\cos x}|\sin x|\,dx = 2\int_{0}^{\pi/2} \left(2-\sin^2 x\right)e^{-\cos x}\sin x\,dx.$$

Inoltre poichè $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ si ha:

$$2\int_{0}^{\pi/2} \left(2-\sin^2 x\right)e^{-\cos x}\sin x\,dx = 2\int_{0}^{\pi/2} \left(1+\cos^2 x\right)e^{-\cos x}\sin x\,dx.$$

Ponendo $y = -\cos x$, $(dy = \sin x\,dx)$, l'integrale diventa:

$$2\int_{-1}^{0} \left(1+y^2\right)e^{y}dy.$$

Si ha

$$\int \left(1+y^2\right)e^{y}dy = \text{ (per parti) } \left(1+y^2\right)e^{y} - \int 2ye^{y}dy =$$

$$\text{(per parti) } \left(1+y^2\right)e^{y} - 2ye^{y} + \int 2e^{y}dy = (1+y^2-2y+2)e^{y} + cost.$$

Quindi si ha:

$$2\int_{-1}^{0} \left(1+y^2\right)e^{y}dy = (3+y^2-2y)e^{y}\Big|_{-1}^{0} = 6\left(1-\frac{2}{e}\right).$$

Esercizio 4 Si consideri la funzione

$$f(z) = i+2-i\bar{z}^3, \qquad z\in\mathbb{C}.$$

Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss gli insiemi

$$A = \{ f(z) : z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) = 0 \},$$
$$B = \{ z \in \mathbb{C} : f(z) = i - 6 \}.$$

Svolgimento. Sia $z = iy$ ($\operatorname{Re}(z) = 0$), si ha:

$$\begin{aligned} A &= \{i + 2 - i(-iy)^3 : y \in \mathbb{R}\} = \{i + 2 + y^3 : y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(2 + y^3) + i : y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

L'insieme A è quindi la retta parallela all'asse delle ascisse passante per il punto i.
Si ha inoltre:

$$\begin{aligned} B &= \{z : i + 2 - i\bar{z}^3 = i - 6\} = \{z : \bar{z}^3 = -8i\} \\ &= \{z : z^3 = 8i\} = \{z : z^3 = 8e^{i\pi/2}\} \\ &= \{2e^{i\pi/6}, 2e^{5\pi i/6}, 2e^{3\pi i/2}\} = \{\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i, -2i\}. \end{aligned}$$

Esercizio 5 [facoltativo] Sia

$$f(x) = \int_{x^2}^{2x^2} \frac{e^t - 1}{t}\, dt.$$

Dimostrare che $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e calcolare l'ordine di infinitesimo di f.
Svolgimento. V. Tema 1.

TEMA 4

Svolgimento. V. fogli scannerizzati.