ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione, Canali 2, 3, 4

Appello del 20.02.2015

TEMA 4

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{-1}{\sin(x/3)} e^{-\left(\frac{1}{|\tan(x/3)|}\right)}$$

nell'intervallo $[-3\pi, 3\pi]$.
(a) Si determini il dominio D di f; si determinino i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; se ne studino la continuità e gli eventuali prolungamenti per continuità;
(b) se ne studi la derivabilità, si calcoli la derivata e si studi la monotonia di f; si determinino gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e si calcolino i limiti significativi di f';
(c) si dimostri che f è periodica, se ne calcoli il periodo e si disegni un grafico qualitativo di f (ripetendolo per periodicità).

Esercizio 2 [9 punti] Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\alpha x - x^2) + \tan x - \log(1+x) - 1}{\log(1+\sin x) - \arctan x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 [9 punti] Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_0^1 \frac{xe^{x/3}}{(e^{x/3}-1)^{2\alpha}}\, dx$$

converge e calcolarlo per $\alpha = 1/4$.

Esercizio 4 [5 punti] Si risolva la disequazione

$$\mathrm{Im}\Big(i(\bar{z}+i-1)^2\Big) \geq \mathrm{Re}\Big((z-2-i)^2\Big)$$

e se ne disegni l'insieme delle soluzioni nel piano di Gauss.

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Tempo a disposizione: tre ore. Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

TEMA 4 COMPITO DI ANALISI 1 - ING 20/02/2015

ESERCIZIO 1 Funzione

$$f(x) = -\frac{1}{\sin(x/3)}\, e^{-\frac{1}{|tg(x/3)|}}$$

su $[-3\pi, 3\pi]$.

- Dominio. Deve essere:

$-\ \sin(x/3) \neq 0 \iff x/3 \neq k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$
$\iff x \neq 3k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$
$\iff x \neq -3\pi, 0, 3\pi$

$-\ tg(x/3) \neq 0 \iff$ come sopra

$-\ tg(x/3)$ definito $\iff x/3 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$
$\iff x \neq \frac{3}{2}\pi + 3k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$
$\iff x \neq \frac{3}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi$

$D(f) = [-3\pi, 3\pi] \setminus \{ x = k\frac{3\pi}{2} : k = -2,-1,0,1,2 \}$

- Simmetrie: f è dispari, $f(-x) = -f(x)$.

Nel seguito: studiamo f su $[0, 3\pi]$

- Limiti:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{\sin(x/3)}\, e^{-\frac{1}{|tg(x/3)|}}$$

$$= \lim_{t\to 0} -\frac{1}{t}\, e^{-\frac{1}{|t|}} = 0 \quad \text{NOTO}$$

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}\pi} f(x) = \lim_{x \to \frac{3}{2}\pi} -\frac{1}{\sin(x/3)} e^{-\frac{1}{|tg(x/3)|}} = -e^{-0} = -1$$

$$\lim_{x \to 3\pi} f(x) = \lim_{x \to 3\pi} -\frac{1}{\sin(x/3)} e^{-\frac{1}{|tg(x/3)|}} = 0$$

- Asintoti : Non ci sono
- Continuità : f continua nel dominio $D(f)$
- Prolungamento : Ponendo

$$f(0) = f(3\pi) = 0 \qquad \text{e poi per simmetria}$$
$$f\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = -1 \qquad \text{e " " "}$$

Si ottiene una funzione continua su $[-3\pi, 3\pi]$

- Derivabilità : f derivabile in $D(f)$.

Punti $x = 0, \frac{3}{2}\pi, 3\pi$ da guardare con cura

- Derivata :

$$f'(x) = \left(\frac{-1}{\sin(x/3)} e^{-\frac{1}{|tg(x/3)|}} \right)'$$

$$= -e^{-\frac{1}{|tg(x/3)|}} \left\{ \frac{-\cos(x/3)}{\sin^2(x/3)} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{\sin(x/3)} \cdot (-1) \frac{1}{|tg(x/3)|} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot (-1) \frac{tg(x/3)}{|tg(x/3)|} \cdot \frac{1}{\cos^2(x/3)} \cdot \frac{1}{3} \right\}$$

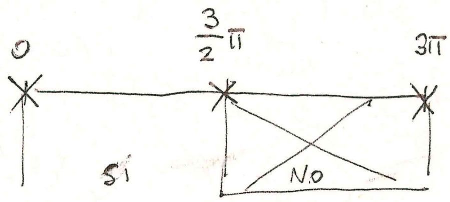
$$f'(x) = \frac{1}{3}\,\frac{e^{-\frac{1}{|tg(x/3)|}}}{\sin^2(x/3)}\left\{\cos(x/3) - \frac{1}{\sin(x/3)}\cdot\frac{tg(x/3)}{|tg(x/3)|}\right\}$$

• Monotonia. Abbiamo

$$f'(x) \geq 0 \iff \cos(x/3) - \frac{1}{\sin(x/3)}\cdot\frac{tg(x/3)}{|tg(x/3)|} \geq 0$$

1° CASO : $tg(x/3) \geq 0 \iff k\pi \leq \frac{x}{3} \leq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\iff x \in [0, \frac{3}{2}\pi]$ (Studiamo solo su $[0, 3\pi]$)



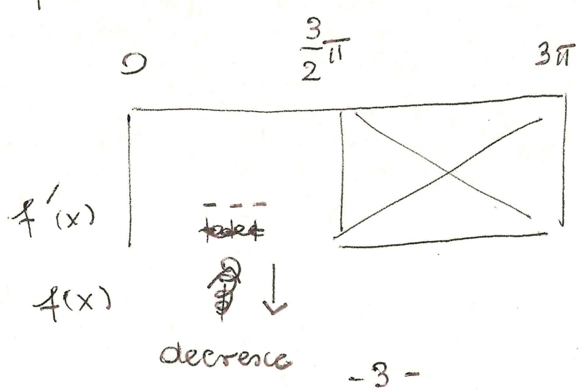
$$f'(x) \geq 0 \iff \cos(x/3) - \frac{1}{\sin(x/3)} \geq 0$$

≤ 0 NEGATIVO

$$\iff \frac{\sin(x/3)\cos(x/3) - 1}{\sin(x/3)} \geq 0$$

> 0

Dunque $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (0, \frac{3}{2}\pi)$



$\underline{2^{\circ}\text{ CASO}}$: $\quad tg(x/3) \leq 0 \iff -\frac{\pi}{2} + k\pi \leq \frac{x}{3} \leq k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

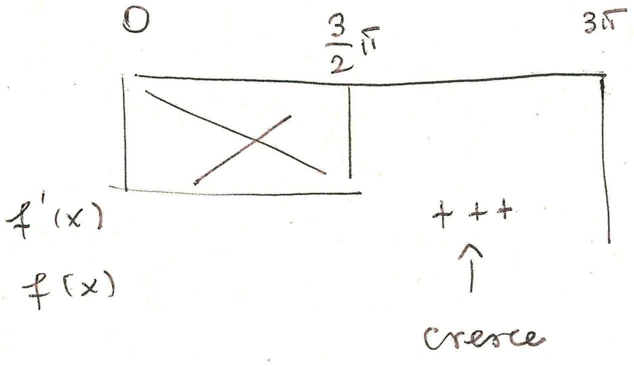
$\iff x \in [\frac{3}{2}\pi, 3\pi]$ (estremi esclusi)

$$f'(x) \geq 0 \iff \cos(x/3) + \frac{1}{\sin(x/3)} \geq 0$$

$$\iff \frac{\sin(x/3)\cos(x/3) + 1}{\sin(x/3)} \geq 0$$

$\iff$ sempre nell' intervallo $[\frac{3}{2}\pi, 3\pi]$

Dunque $\quad f'(x) > 0 \quad \forall x \in (\frac{3}{2}\pi, 3\pi)$



• Limiti di $f'(x)$

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3} \frac{e^{-\frac{1}{|tg(x/3)|}}}{\sin^2(x/3)} \left\{ \cos(x/3) - \frac{1}{\sin(x/3)} \frac{tg(x/3)}{|tg(x/3)|} \right\}$$

$= 0 \quad$ è del tipo $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{|t|}} = 0$

$\pm \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^3} e^{-\frac{1}{|t|}}$

Analogamente: $\lim_{x \to 3\pi} f'(x) = 0$

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}\pi^-} f'(x) = \lim_{x \to \frac{3}{2}\pi^-} \frac{1}{3} \frac{e^{-\frac{1}{|tg(x/3)|}}}{\sin^2(x/3)} \left\{ \cos(x/3) - \frac{1}{\sin(x/3)} \right\}$$

$$= -\frac{1}{3}$$

Analog:

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}\pi^+} f'(x) = +\frac{1}{3}$$

Dunque $x = \frac{3}{2}\pi$ è un p.to di angolo

• Grafico: