Analisi 2 – Fisica e Astronomia

Nome: Appello scritto del 12 Settembre 2011 – Soluzione

Esercizio 1 (8 pti) Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{x \arctan(x^\alpha)}{\sinh(x^2)}\, dx.$$

Soluzione. La convergenza dell'integrale va studiata sia in un intorno destro di 0 che a $+\infty$. Ricordiamo che per ogni $p > 0$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sinh(x^2)}{x^p} = +\infty.$$

Quindi esiste una costante $C > 0$ tale che per ogni $x \geq 1$ si ha

$$\frac{1}{\sinh(x^2)} \leq \frac{C}{x^p}.$$

Dunque, per $x \geq 1$ si può maggiorare

$$\Big|\frac{x \arctan(x^\alpha)}{\sinh(x^2)}\Big| \leq \frac{\pi C}{2} \frac{1}{x^{p-1}}.$$

Con la scelta $p = 3$ (o comunque $p > 2$), si trova

$$\int_1^\infty \Big|\frac{x \arctan(x^\alpha)}{\sinh(x^2)}\Big| dx \leq \frac{\pi C}{2} \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx < +\infty.$$

Sull'intervallo $[1, \infty)$ c'è convergenza assoluta per ogni valore di α.

Esaminiamo la convergenza dell'integrale sull'intervallo $[0, 1]$.

Primo caso: $\alpha > 0$. In questo caso la funzione $x \mapsto \arctan(x^\alpha)$ è infinitesima e precisamente $\arctan(x^\alpha) = x^\alpha + o(x^\alpha)$ per $x \to 0+$. Analogamente, $\sinh(x^2) = x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$. In definitiva si ha per $x \to 0$

$$\frac{x \arctan(x^\alpha)}{\sinh(x^2)} = \frac{x(x^\alpha + o(x^\alpha))}{x^2 + o(x^2)} = \frac{1 + o(1)}{x^{1-\alpha}}.$$

Per il Teorema del confronto asintotico, l'integrale

$$\int_0^1 \frac{x \arctan(x^\alpha)}{\sinh(x^2)} dx$$

converge (semplicemente e assolutamente) se e solo se $1-\alpha<1$ ovvero $\alpha>0$, ovvero sempre nel caso in esame.

Secondo caso: $\alpha \le 0$. In questo caso la funzione $x \mapsto \arctan(x^\alpha)$ non è infinitesima per $x \to 0^+$, ma converge a $C=\pi/2$ se $\alpha<0$ ed a $C=\pi/4$ se $\alpha=0$. Quindi si ha per $x \to 0$

$$\frac{x\arctan(x^\alpha)}{\sinh(x^2)} = \frac{C+o(1)}{x}.$$

Dal teorema del confronto asintotico si deduce che per $\alpha \le 0$ l'integrale

$$\int_0^1 \frac{x\arctan(x^\alpha)}{\sinh(x^2)}dx$$

diverge.

In conclusione, l'integrale converge se e solo se $\alpha>0$.

Esercizio 2 (8 pti) Sia $p>0$ un numero reale fissato, sia $K_p \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme

$$K_p = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|^{2p}+|y|^{2p}\le 1\big\},$$

e sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la funzione $f(x,y)=x^3y^3$.

1) [3 pti] Provare che f assume su K_p un valore minimo m_p ed un valore massimo M_p.

2) [5 pti] Calcolare i valori m_p ed M_p.

Soluzione. 1) La funzione f è continua, perchè è un polinomio. L'insieme K_p è limitato, perchè è contenuto nel quadrato $[-1,1]\times[-1,1]$, ed inoltre è chiuso per il seguente motivo. La funzione $h(x,y)=|x|^{2p}+|y|^{2p}-1$ è continua e dunque $K_p=h^{-1}(-\infty,0])$ è chiuso. Per il Teorema di Weierstrass, f ammette massimo e minimo su K_p.

2) Il gradiente di f è $\nabla f(x,y)=(3x^2y^3,3x^3y^2)$ che si annulla se $x=0$ oppure se $y=0$, ovvero sui due assi. In questi punti $f=0$. Siccome certamente $M_p>0$ ed $m_p<0$ i punti critici di f all'interno di K_p non forniscono i valori minimo e massimo.
Dunque i punti di minimo e di massimo si trovano su ∂K_p, ovvero sull'insieme dove $h=0$. Possiamo anche supporre che $xy\neq 0$. Intorno ai punti $(x,y)\in\partial K_p$ in cui $xy\neq0$ la funzione h è certamente di classe C^1 e $\nabla h\neq(0,0)$. Sono verificate le ipotesi del teorema sui moltiplicatori di Lagrange. Quindi per ogni punto $(x,y)\in\partial K_p$ di estremo assoluto di f ristretta a ∂K_p, esiste un numero $\lambda\in\mathbb{R}$ tale

$$\nabla f(x,y)=\lambda\nabla h(x,y),$$

dove $\nabla h(x,y)=(2p|x|^{2(p-2)}x,2p|y|^{2(p-2)}y)$. Il sistema è dunque

$$\begin{cases} 3x^2y^3 = 2\lambda p|x|^{2(p-1)}x, \\ 3x^3y^2 = 2\lambda p|y|^{2(p-1)}y. \end{cases}$$

Per quanto detto sopra, deve essere $\lambda \neq 0$. È ammesso moltiplicare la prima equazione per $x \neq 0$ e la seconda per $y \neq 0$. Si trova il nuovo sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 3x^3y^3 = 2\lambda p|x|^{2p}, \\ 3x^3y^3 = 2\lambda p|y|^{2p}. \end{cases}$$

Confrontando le due equazioni si deduce che $|x| = |y|$. Usando l'informazione $h(x,y) = 0$ si deduce che $2|x|^{2p} = 1$, ovvero $|x| = (1/2)^{\frac{1}{2p}}$. Dunque, nei punti

$$\big(2^{-\frac{1}{2p}}, 2^{-\frac{1}{2p}}\big) \quad \text{e} \quad \big(-2^{-\frac{1}{2p}}, -2^{-\frac{1}{2p}}\big),$$

f assume il valore massimo $M_p = \big(\frac{1}{2}\big)^{\frac{3}{p}}$. Nei punti

$$\big(-2^{-\frac{1}{2p}}, 2^{-\frac{1}{2p}}\big) \quad \text{e} \quad \big(2^{-\frac{1}{2p}}, -2^{-\frac{1}{2p}}\big),$$

f assume il valore massimo $m_p = -\big(\frac{1}{2}\big)^{\frac{3}{p}}$.

Esercizio 3 (8 pti) Si considerino il quadrato $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \text{ e } |y| \leq 1\}$ e la funzione $f : Q \to \mathbb{R}^2$ a valori in $\mathbb{R}^2$ così definita

$$f(x,y) = \Big(\frac{1}{6}(1 - y - y^2), \frac{1}{6}(x^2 - x - 1)\Big).$$

1) [2 pti] Provare che $f(Q) \subset Q$.

2) [6 pti] Usando il teorema delle contrazioni, provare che il sistema di equazioni

$$\begin{cases} 6x = 1 - y - y^2 \\ 6y = x^2 - x - 1 \end{cases}$$

ha nel quadrato Q una soluzione unica $(x,y) \in Q$.

Soluzione. 1) Indichiamo le due componenti di f nel seguente modo:

$$f_1(x,y) = \frac{1}{6}(1 - y - y^2) \quad \text{e} \quad f_2(x,y) = \frac{1}{6}(x^2 - x - 1).$$

Chiaramente $|f_1(x,y)| \leq \frac{1}{6}(1 + |y| + |y|^2) \leq \frac{1}{2}$ e $|f_2(x,y)| \leq \frac{1}{6}(1 + |x| + |x|^2) \leq \frac{1}{2}$. Questo prova che $f(Q) \subset Q$.

2) Q è uno spazio metrico completo con la distanza Euclidea d. Proviamo che f è una contrazione su Q. L'esistenza di un'unica soluzione $(x,y) \in Q$ del sistema segue dal teorema di punto fisso.

Siano $(x,y),(\bar{x},\bar{y}) \in Q$. Allora

$$\begin{aligned}|f_1(x,y)-f_1(\bar{x},\bar{y})| &= \frac{1}{6}|y-\bar{y}+y^2-\bar{y}^2| \le \frac{1}{6}(|y-\bar{y}|+|y-\bar{y}||y+\bar{y}|)\\ &\le \frac{1}{6}(1+2)|y-\bar{y}| = \frac{1}{2}|y-\bar{y}|.\end{aligned}$$

In modo identico si prova che $|f_2(x,y)-f_2(\bar{x},\bar{y})| \le \frac{1}{2}|x-\bar{x}|$. In conclusione:

$$\begin{aligned}d(f(x,y)),f(\bar{x},\bar{y})) &= \sqrt{|f_1(x,y)-f_1(\bar{x},\bar{y})|^2+|f_2(x,y)-f_2(\bar{x},\bar{y})|^2}\\ &\le \sqrt{\frac{1}{4}|y-\bar{y}|^2+\frac{1}{4}|x-\bar{x}|^2} = \frac{1}{2}d((x,y),(\bar{x},\bar{y})).\end{aligned}$$

Dunque, f è una contrazione con fattore di contrazione $\lambda = \frac{1}{2} < 1$.

Esercizio 4 (8 pti) Si consideri la seguente equazione differenziale non lineare

$$(y')^2 + xy' - y = 0.$$

1) [5 pti] Calcolare tutti i polinomi di grado minore o uguale a 2 che risolvono l'equazione differenziale.

2) [2 pti] Esistono polinomi di grado maggiore di 2 che risolvono l'equazione?

3) [1 pti] Sia $y \in C^1(\mathbb{R})$ una soluzione dell'equazione differenziale. Provare che $x^2 + 4y(x) \ge 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Soluzione. 1) Cerchiamo soluzioni dell'equazione differenziale della forma $p(x) = ax^2 + bx + c$ con $a,b,c \in \mathbb{R}$ da determinare. La derivata del polinomio è $p'(x) = 2ax + b$. Sostituendo nell'equazione differenziale

$$0 = (2ax+b)^2 + x(2ax+b) - (ax^2+bx+c) = (4a^2+a)x^2 + 2abx + b^2 - c = 0.$$

Il polinomio a destra è 0 se e solo so tutti i coefficienti sono nulli: $a(4a+1) = 0$, $2ab = 0$, $b^2 - c = 0$. La prima equazione ha le soluzioni $a = 0$ e $a = -1/4$. Nel caso $a = 0$ la seconda equazione è automaticamente soddisfatta per ogni $b \in \mathbb{R}$ e la terza fornisce $c = b^2$. Nel caso $a = -1/4$, la seconda equazione fornisce $b = 0$ e la terza $c = 0$. Le soluzioni polinomiali cercate sono

$$y(x) = -\frac{1}{4}x^2 \quad \text{e} \quad y(x) = bx + b^2, \quad b \in \mathbb{R}.$$

2) Se p è un polinomio di grado n, allora $(p')^2$ è un polinomio di grado $2(n-1)$ e xp' è un polinomio di grado n. Affinchè p sia soluzione dell'equazione differenziale, deve essere verificata la seguente relazione sui gradi: $2(n-1) \le n$, ovvero $n \ge 2$. Quindi non ci sono polinomi di grado maggiore o uguale a 3 che risolvono l'equazione.

3) Fissato $x \in \mathbb{R}$, il numero $\lambda = y'(x)$ verifica l'equazione di secondo grado $\lambda^2 + x\lambda - y(x) = 0$. Quindi il discriminante del polinomio in λ non può essere strettamente negativo, ovvero deve essere $x^2 + 4y(x) \ge 0$.