Analisi 2 – Fisica e Astronomia

Nome: Appello scritto del 18 Luglio 2011 – Compito A

Esercizio 1 (7 pti) Sia $\alpha > 0$ un parametro e consideriamo la curva piana $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \left(t^2 \cos\left(\frac{1}{t^\alpha}\right), t^2 \sin\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)\right), \quad \text{se } t \in (0,1], \quad \text{e} \quad \gamma(0) = (0,0).$$

1) [2 pti] Riparametrizzare γ in coordinate polari e disegnare approx. il sostegno di γ.

2) [5 pti] Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che la curva γ è rettificabile.

Esercizio 2 (8 pti) In dipendenza da $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) := \begin{cases} (2x^2 + y^2)^\alpha \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) [6 pti] Studiare la continuità e la differenziabilità di f al variare del parametro α.

2) [2 pti] Esiste α tale che f è differenziabile su $\mathbb{R}^2$ ma non di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$?

Esercizio 3 (9 pti) Per $n \geq 1$ siano $B = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\right\}$ e $x_0 \in B$ tale che $|x_0| \leq \frac{1}{12}$. Sia poi $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la funzione

$$T(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{9}|x|^2 x + x_0.$$

1) [2 pti] Provare che T trasforma B in se, ovvero che $T(B) \subset B$.

2) [5 pti] Per $n = 1$: provare che T è una contrazione da B in se.

3) [2 pti] Per $n \geq 1$: provare che l'equazione $T(x) = x$ ha una soluzione unica $x \in B$.

Esercizio 4 (8 pti) Siano $f(x,y) = \sqrt{y - 2x^2}$ e

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\, 2y \leq x^2 + 1,\, y \geq 2x^2\right\}.$$

1) [1pto] Determinare il dominio di f e disegnare K nel piano.

2) [2pti] Stabilire se K è aperto/chiuso/compatto/connesso. Calcolare la frontiera ∂K.

3) [4pti] Calcolare i punti di max e min locale/assoluto di f ristretta a ∂K.

4) [1pto] Determinare l'immagine $f(K)$.

Tempo a disposizione: 3 ore.