

Analisi 2 – Fisica e Astronomia

Nome:

Appello scritto del 28 Giugno 2011 – Compito A

Esercizio 1 (8 pts)

1) [4 pts] Calcolare l'integrale improprio $\int_0^1 \log^2 x \, dx$;

2) [4 pts] Studiare la convergenza dell'integrale improprio $\int_0^1 \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \log x \, dx$.

Esercizio 2 (8 pts) Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e sia $y \in C^\infty(\mathbb{R})$ la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' + 2y' + 2y = te^{-t}, \quad y(0) = \alpha, \quad y'(0) = \beta.$$

1) [6 pts] Calcolare la soluzione y .

2) [2 pts] Determinare tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per i quali esiste finito il limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t)}{t}.$$

Esercizio 3 (8 pts) Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^2}{x^4 + y^6} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1) [4 pts] Provare che f è continua su \mathbb{R}^2 .

2) [4 pts] Stabilire se f è differenziabile in $(0, 0)$.

Esercizio 4 (8 pts)

1) [6 pts] Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$ e sia

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 2\}.$$

Determinare l'immagine $f(K)$.

2) [2 pts] Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Provare che se $a > 0$ e $ac > b^2$ allora g ammette minimo assoluto in \mathbb{R}^2 .

Tempo a disposizione: 3 ore.