Analisi 2 – Fisica e Astronomia

Appello scritto del 28 Giugno 2011. Soluzione

Esercizio 1 (8 pti)

1) [4 pti] Calcolare l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \log^2 x\,dx$;

2) [4 pti] Studiare la convergenza dell'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\log x\,dx$.

Soluzione. 1) Con due integrazioni per parti si ottiene:

$$\int \log^2 x\,dx = x\log^2 x - 2\int \log x\,dx = x\log^2 x - 2x\log x + 2x + C.$$

Quindi si trova

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log^2 x\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \log^2 x\,dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big[x\log^2 x - 2x\log x + 2x\Big]_{x=\varepsilon}^{x=1} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big(2-\varepsilon\log^2\varepsilon + 2\varepsilon\log\varepsilon - 2\varepsilon\Big) = 2.\end{aligned}$$

L'integrale improprio è convergente.
2) Utiliziamo il Criterio del confronto asintotico. Confrontiamo la funzione

$$f(x) = \log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\log(x)$$

con la funzione $g(x) = \log^2 x$. Il limite del quoziente per $x\to 0$ è

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\log x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-2}{1+x^2} = -2 \neq 0.$$

Dal punto 1) segue che l'integrale improprio di f converge.

Esercizio 2 (8 pti) Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e sia $y \in C^\infty(\mathbb{R})$ la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' + 2y' + 2y = t\mathrm{e}^{-t}, \quad y(0) = \alpha,\ y'(0) = \beta.$$

1) [6 pti] Calcolare la soluzione y.

2) [2 pti] Determinare tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per i quali esiste finito il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{y(t)}{t}.$$

Soluzione. 2) L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è $\lambda^2+2\lambda+2 = 0$ che ha le radici complesse coniugate $\lambda = -1 \pm i$. Pertanto la soluzione dell'equazione omogenea associata è $y = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$, dove $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sono costanti arbitrarie. Per trovare l'integrale generale dell'equazione non omogenea si può usare il metodo della variazione delle costanti. Si arriva al sistema nelle funzioni incognite $\dot{C}_1, \dot{C}_2$:

$$\begin{cases} \dot{C}_1 e^{-t}\cos t + \dot{C}_2 e^{-t}\sin t = 0 \\ \dot{C}_1 \frac{d}{dt}(e^{-t}\cos t) + \dot{C}_2 \frac{d}{dt}(e^{-t}\sin t) = te^{-t}, \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} \dot{C}_1 \cos t + \dot{C}_2 \sin t = 0 \\ \dot{C}_1 \sin t - \dot{C}_2 \cos t = -t. \end{cases}$$

Dopo brevi conti si trovano le soluzioni

$$\begin{cases} \dot{C}_1 = -t\sin t \\ \dot{C}_2 = t\cos t, \end{cases}$$

e integrando si ottiene

$$C_1 = c_1 + t\cos t - \sin t, \qquad C_2 = c_2 + t\sin t + \cos t,$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sono costanti. L'integrale generale dell'equazione differenziale è pertanto

$$y = e^{-t}\left((c_1 + t\cos t - \sin t)\cos t + (c_2 + t\sin t + \cos t)\sin t\right) = e^{-t}\big(t + c_1\cos t + c_2 \sin t\big).$$

Le costanti c_1, c_2 si determinando imponendo le condizioni iniziali:

$$c_1 = \alpha, \qquad c_2 = \alpha + \beta - 1.$$

La soluzione del Problema di Cauchy è dunque

$$y = e^{-t}\left(t + \alpha\cos t + (\alpha + \beta - 1)\sin t\right).$$

2) Infine, il seguente limite esiste finito

$$\lim_{x\to 0} \frac{y(t)}{t}$$

se e solo se $\alpha = 0$, per ogni $\beta \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 (8 pti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^4+y^6} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) [4 pti] Provare che f è continua su $\mathbb{R}^2$.

2) [4 pti] Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$.

Soluzione. 1) Certamente risulta $f \in C(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ in quanto su tale insieme f è quoziente di funzioni continue e il denominatore non si annulla. Controlliamo la continuità nel punto $(0,0)$. Abbiamo le disuguaglianze:

$$|f(x,y)| \leq \frac{|x|^3|y|^2}{x^4+y^6} \leq \frac{(x^4+y^6)^{3/4}(x^4+y^6)^{1/3}}{x^4+y^6} = (x^4+y^6)^{\frac{1}{12}}.$$

Dal momento che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^4+y^6)^{\frac{1}{12}} = 0,$$

per confronto si ottiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

Questo prova la continuità di f in $(0,0)$. [La soluzione di questo esercizio con le coordinate polari non è agevole.]
2) Le derivate parziali di f nel punto $(0,0)$ esistono e valgono

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0.$$

Per definizione, la funzione f è differenziabile in $(0,0)$ se il seguente limite esiste ed è zero:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0), (x,y) \rangle}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}(x^4+y^6)}.$$

Esaminiamo il limite per $x \to 0$ della funzione $g(x,y) = \frac{x^3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}(x^4+y^6)}$ lungo una retta della forma $y = mx$, con $m \in \mathbb{R}$:

$$g(x,mx) = \frac{tm^2}{|t|\sqrt{1+m^2}(1+m^6t^2)}.$$

Questa funzione ha limite per $t \to 0$ solo nel caso $m = 0$. Quindi il limite di $g(x,y)$ per $(x,y) \to (0,0)$ non esiste. Di conseguenza, la funzione f non è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 4 (8 pti) 1) [6 pti] Sia $f : \mathbb{R}^2 \to$ la funzione $f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$ e sia

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \le 2\right\}.$$

Determinare l'immagine $f(K)$.

2) [2 pti] Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $g(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Provare che se $a > 0$ e $ac > b^2$ allora g ammette minimo assoluto in $\mathbb{R}^2$.

Soluzione. 1) L'insieme K è chiuso e limitato. Si tratta di un'ellisse. K è anche connesso. Dal Teorema di Weierstrass e dal Teorema dei valori intermedi segue che

$$f(K) = \left[\min_K f, \max_K f\right].$$

Iniziamo a cercare i punti critici interni a K. Il gradiente $\nabla f(x,y) = (4x + 2y, 2x + 8y)$ si annulla solo in $(0,0)$. Questo è l'unico punto critico. Inoltre, la matrice Hessiana di f è in tutti i punti

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\det(\nabla^2 f(0,0)) = 7 > 0$ e $\operatorname{tr}(\nabla^2 f(0,0)) = 6 > 0$, la matrice Hessiana in $(0,0)$ è definita positiva. Quindi, $(0,0)$ è un punto di minimo locale. Dato che la forma quadratica $f(x,y) = x^2 + xy + 3y^2$ è definita positiva, ovvero $f(x,y) \ge 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Concludiamo che $\min_K f = 0$.
I punti di massimo assoluto si trovano certamente sulla frontiera di K, cioè sull'ellisse di equazione $x^2 + 2y^2 = 2$. Per calcolarli si può utilizzare il Teorema sui moltiplicatori di Lagrange. Un modo più rapido è di parametrizzare l'ellisse in questo modo: $x = \sqrt{2}\cos\vartheta, y = \sin\vartheta$ con $\vartheta \in [0, 2\pi]$. La funzione f sul bordo dell'ellisse è

$$f(\sqrt{2}\cos\vartheta, \sin\vartheta) = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2\vartheta)$$

che assume il massimo quando $\sin(2\vartheta) = 1$. Dunque, si ha

$$\max_K f = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

In conclusione, l'immagine di K è $f(K) = [0, 2 + \sqrt{2}/2]$.
2) Nelle ipotesi $a > 0$ e $ac - b^2 > 0$ risulta $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 \ge 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. [Ovvero, f è una forma quadratica semidefinita positiva, in effetti definita positiva]. Una verifica diretta di questa disuguaglianza si basa sul fatto che, per ogni y fissato, il discriminante del corrispondente polinomio quadratico in x è negativo. Alternativamente:

$$ax^2 + bxy + cy^2 \ge ax^2 - |b||x||y| + cy^2 \ge ax^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{c}|x||y| + cy^2 \ge 0.$$

Poichè $f(0,0) = 0$, il punto $(0,0)$ è un (il) punto di minimo assoluto.

[In effetti, l'ipotesi precisa da assumere in questo esercizio è $4ac - b^2 > 0$.]