

Analisi 2 – Fisica e Astronomia

Nome:

Appello scritto del 31 Agosto 2011 – Compito B

Esercizio 1 (8 pti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione così definita:

$$f(x, y) = (x^5 + y^5)^{1/5}.$$

- 1) [2 pti] Studiare la continuità di f in \mathbb{R}^2
- 2) [3 pti] Calcolare, se esistono, le derivate parziali e direzionali di f nel punto $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$.
- 3) [3 pti] Stabilire se f è differenziabile in \mathbb{R}^2 .

Esercizio 2 (8 pti) Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\frac{x(1+y^2)}{y(1-x^2)} \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

- 1) [6 pti] Calcolare la soluzione del problema specificandone il dominio.
- 2) [2 pti] Studiare brevemente la soluzione e tracciarne un grafico approssimativo.

Esercizio 3 (8 pti) Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{n^2 \log(1 + |x|/n^2)}{1 + n^2 x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- 1) [2 pti] Calcolare il limite puntuale della successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 2) [1 pto] Provare che si ha $|f_n(x)| \leq \frac{|x|}{1 + x^2 n^2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- 3) [5 pti] Studiare la convergenza uniforme della successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Esercizio 4 (8 pti) Siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 + x + y > 0\}$ ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = e^{y(1+x)} - \log(1 + x + y) - 1.$$

- 1) [3 pti] Provare che l'equazione $f = 0$ definisce implicitamente intorno a $0 \in \mathbb{R}^2$ una funzione φ definita in un intervallo $(-\delta, \delta)$ per qualche $\delta > 0$.
- 2) [2 pti] Esprimere φ' in funzione (di φ e) delle derivate parziali di f in un generico punto di $(-\delta, \delta)$ e calcolare poi $\varphi'(0)$.
- 3) [3 pti] Calcolare $f_{yy}(0, 0)$ e quindi $\varphi''(0)$.

Tempo a disposizione: 3 ore.