Analisi 2 – 2011 — Foglio 7

1. Funzioni di più variabili II

Esercizio 1.1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

i) Stabilire se $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$;
ii) Stabilire se $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Esercizio 1.2. Calcolare la soluzione $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ del seguente problema differenziale alle derivate parziali:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = u & \text{in } \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = x & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Esercizio 1.3. Verificare che la funzione $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$, $n \geq 1$,

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0,$$

verifica l'*equazione del calore*

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Delta u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0,$$

dove $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ è l'operatore di Laplace.

Esercizio 1.4. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ il più grande insieme su cui la funzione

$$f(x,y) := |x^2 - 2x| - \log(y^2 + x) + \log x$$

è ben definita.

i) Calcolare i punti di estremo di f in A e classificarli;
ii) Stabilire se f ha punti di sella in A.

Esercizio 1.5. Siano $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 2\pi\}$ ed $f : K \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) := \sin(2x)\cos(y).$$

i) Provare che f assume massimo e minimo su K;
ii) Calcolare i punti di estremo di f in K e classificarli;
iii) Dire se f ha punti di sella nell'interno di K;
iv) Tracciare un grafico qualitativo di f;
v) Calcolare l'insieme immagine $f(K)$.

Esercizio 1.6. Determinare il massimo della funzione $f(x,y) := 2xy$ sull'insieme

$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq \frac{1}{\alpha^2 + y^2} \right\},$$

in funzione del parametro $\alpha > 0$.

Esercizio 1.7. [*] Trovare il minimo assoluto della funzione

$$f(\alpha, \beta) := \int_0^1 \left(\alpha t + \beta - \sin \frac{\pi t}{2} \right)^2 dt$$

al variare di $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Esercizio 1.8. [**] Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto con interno non vuoto, $\mathrm{int}(K) \neq \emptyset$, e sia $f : K \to \mathbb{R}$ una funzione con queste proprietà: 1) f è continua su K; 2) f è differenziabile in $\mathrm{int}(K)$; f è costante su ∂K.

Dimostrare che esiste almeno un punto $x \in \mathrm{int}(K)$ tale che $\nabla f(x) = 0$.