Analisi Matematica 2 – 2011
Fisica–Astronomia

Programma finale del corso

1) Integrali generalizzati. Integrali impropri su intervallo illimitato: Criterio del confronto; Criterio del confronto asintotico; Esempi ed esercizi. Teorema sulla convergenza assoluta. Teorema sulla convergenza di integrali di tipo oscillatorio. Integrali impropri di funzioni non limitate: criterio del confronto asintotico. Esempi ed esercizi.

2) Introduzione alle equazioni differenziali ordinarie. Equazioni differenziali lineari del primo ordine: Teorema sulla formula risolutiva. Equazioni a variabili separabili: tecnica risolutiva. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine: Teorema di esistenza e unicità della soluzione per il Problema di Cauchy (senza dimostrazione); Teorema sulla dimensione dello spazio delle soluzioni; Wronskiano; Teorema sulle soluzioni linearmente indipendenti; metodo della variazione delle costanti per le equazioni non omogenee; classificazione delle soluzioni per le equazioni omogenee a coefficienti costanti. Esempi ed esercizi su tutti gli argomenti.

3) Curve parametriche in $\mathbb{R}^n$. Curve in $\mathbb{R}^n$ e curve regolari. Vettore tangente. Lunghezza di curve e curve rettificabili. Esempi di curve non rettificabili. Teorema sulla rettificabilità delle curve di classe C^1 e formula della lunghezza. Riparametrizzazione di curve e orientazione. Teorema sulla riparametrizzazione di curve regolari a lunghezza d'arco. Curve in coordinate polari. Definizione e proprietà dell'integrale curvilineo.

4) Spazi metrici e normati. Spazio metrico e spazio normato. $\mathbb{R}^n$ come spazio normato. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Lo spazio $C([0,1];\mathbb{R}^n)$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Successioni in uno spazio metrico. Funzioni continue fra spazi metrici. Teorema di caratterizzazione tramite successioni delle funzioni continue. Funzioni continue da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$. Limiti in più variabili: esempi ed esercizi. Spazi metrici completi e spazi di Banach. $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R}^n$ sono completi con la distanza Euclidea. Teorema: $C([0,1];\mathbb{R}^n)$ è uno spazio di Banach con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Convergenza puntuale e convergenza uniforme di successioni di funzioni. Cenno al teorema sullo scambio dei limiti. Teorema delle contrazioni di Banach. Insiemi aperti e chiusi in uno spazio metrico. Interno, chiusura e frontiera di un insieme. Caratterizzazione sequenziale della chiusura. Topologia di uno spazio metrico e proprietà assiomatiche della topologia. Teorema sulla caratterizzazione topologia della continuità. Spazi metrici e insiemi compatti. Teorema di Heine-Borel. L'immagine continua di un compatto è compatta. Teorema di Weierstrass. Spazi e insiemi connessi. L'intervallo $[0,1]$ è connesso. L'immagine continua di un connesso è connessa. Spazi connessi per archi. Teorema: gli aperti di di $\mathbb{R}^n$ connessi sono connessi per archi. Teorema dei valori intermedi. Esempi ed esercizi su tutti gli argomenti.

5) Calcolo differenziale in $\mathbb{R}^n$. Derivate parziali e derivate direzionali (anche di funzioni a valori vettoriali). Matrice Jacobiana e gradiente. Richiami sulle trasformazioni lineari. Funzioni differenziabili e differenziale. Caratterizzazione della differenziabilità tramite sviluppo con errore. La differenziabilità implica la continuità e l'esistenza delle derivate direzionali. Spazio tangente al grafico di funzione. Identificazione di differenziale e matrice Jacobiana. Le funzioni di classe C^1 sono differenziabili. Teorema sul differenziale della funzione composta. Caso speciale: derivata di una funzione lungo una curva. Teorema del valor medio per funzioni scalari. Teorema del valor medio per funzioni vettoriali. Norma di una trasformazione lineare. Disuguaglianza $|f(x) - f(y)| \leq \|df(z)\||x - y|$. Funzioni con gradiente nullo in un aperto connesso. Derivate successive. Funzioni di classe C^∞. Teorema di Schwarz per le funzioni C^2. Formula di Taylor in più variabili al secondo ordine. Matrice Hessiana. Esercizi elementari sulle equazioni alle derivate parziali: equazione di Laplace, equazione $u_x + u_y = 0$, equazione delle onde. Richiami sulle forme quadratiche: matrici definite e semidefinite. Punti critici e punti di estremo locale. Condizione necessaria al primo ordine per i punti di estremo locale. Condizione necessaria al secondo ordine per i punti di estremo locale. Condizione sufficiente al secondo ordine per i punti di estremo locale stretto. Matrici simmetriche 2×2 definite positive e negative. Punti di sella. Esempi ed esercizi su tutti gli argomenti.

6) Invertibilità locale e funzione implicita. Diffeomorfismi e diffeomorfismi locali. Teorema di invertibilità locale. Teorema della funzione implicita. Massimi e minimi vincolati. Teorema dei moltiplicatori di Lagrange (con una sola funzione di vincolo). Esempi ed esercizi su tutti gli argomenti.

7) Teoria delle sottovarietà di $\mathbb{R}^n$. Sottovarietà differenziabili di $\mathbb{R}^n$ e parametrizzazioni. Teorema di equivalenza (senza dimostrazione). Spazio tangente e spazio normale. Teorema di caratterizzazione dello spazio tangente. Esempi.

Il punto 7) del programma è oggetto di esame orale ma non di esame scritto. Fanno parte integrante del programma anche i fogli di esercizi in rete, Fogli 1–8, con l'eccezione di: F1 Es. 2.5; F2 Es. 2.5; F3 Es. 1.7.

Struttura dell'esame scritto: quattro esercizi/problemi da risolvere simili a quelli discussi durante il corso, il tutorato ed assegnati per casa.

Struttura dell'esame orale: due/tre domande di cui una su un teorema con dimostrazione ed un'altra su un esercizio scelto fra quelli proposti nei Fogli $1 - 8$.

16 Giugno 2011
R. Monti