Analisi 2

Roberto Monti

Appunti del Corso - Versione 5 Ottobre 2012

Indice

CAPITOLO 1

Programma

Convergenza uniforme: Sup-norma. Teorema dello scambio dei limiti, continuità del limite uniforme. Criterio di Abel-Dirichlet per la convergenza uniforme di serie. Teorema di Dini. Convergenza uniforme e differenziabilità, scambio di somma e derivata. Convergenza uniforme e integrale di Riemann, scambio di limite e integrale.

Spazi metrici. Continuazione: Tutte le norme in $\mathbb{R}^n$ sono equivalenti. Lo spazio $C(K)$ è completo. Spazio delle trasformazioni lineari e continue, norma di un operatore, caratterizzazione della continuità. Funzioni Lipschitziane. Teoremi di punto fisso ed applicazioni.

Curve in $\mathbb{R}^n$. Curve regolari. Vettore tangente. Lunghezza e curve rettificabili. Teorema di rettificabilità. Riparametrizzazione a lunghezza d'arco.

Calcolo differenziale in $\mathbb{R}^n$. Derivate parziali e direzionali. Funzioni differenziabili. Differenziale della funzione composta. Teoremi del valor medio. Funzioni di classe C^1. Punti critici e punti di max/min locale. Teorema di Rademacher. Derivate di ordine superiore. Teorema di Schwarz. Formula di Taylor.

Equazioni differenziali ordinarie. Equazioni lineari del primo ordine. Equazioni a variabili separabili. Problema di Cauchy. Esistenza e unicità locale della soluzione con ipotesi Lipschitz. Soluzioni massimali. Lemma di Gronwall e soluzioni globali. Studio qualitativo. Cenni alle equazioni alle derivate parziali.

Teorema di Dini. Diffeomorfismi e diffeomorfismi locali. Teorema di invertibilità locale. Teorema della funzione implicita.

Sottovarietà differenziabili di $\mathbb{R}^n$. Equazione locale e parametrizzazioni. Sottovarietà. Teorema di equivalenza. Spazio tangente e spazio normale.

CAPITOLO 2

Convergenza uniforme

1. Convergenza uniforme e continuità

Siano X un insieme ed $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione. Definiamo la "sup-norma" di f su X

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

La "sup-norma" verifica le seguenti proprietà elementari:

1) Si ha $\|f\|_\infty < \infty$ se e solo se f è limitata su X.
2) Vale la subadittività:

$$\begin{aligned}\|f+g\|_\infty &= \sup_{x \in X} |f(x)+g(x)| \le \sup_{x \in X} |f(x)| + |g(x)| \\ &\le \sup_{x \in X} |f(x)| + \sup_{x \in X} |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.\end{aligned}$$

3) Sia $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni. La successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente su* X alla funzione $f : X \to \mathbb{R}$ se

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Per questo motivo, la "norma" $\|\cdot\|_\infty$ si chiama anche "norma della convergenza uniforme".
4) Sia X uno spazio metrico compatto e sia $f \in C(X)$. Per il Teorema di Weierstrass, la funzione $x \mapsto |f(x)|$ assume massimo su K. Dunque, nella definizione di sup-norma il sup può essere sostituito con un max:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| = \max_{x \in X} |f(x)|.$$

È immediato controllare che lo spazio vettoriale $C(X)$ è normato da $\|\cdot\|_\infty$. Vedremo nel Teorema **??** che $C(X)$ è uno spazio di Banach.

Esempio 1.1 (Palla nella norma $\|\cdot\|_\infty$). Ad esempio, nel caso $X = [0,1]$ per ogni $f \in C([0,1])$ ed $r > 0$, la palla

$$\begin{aligned}B_r(f) &= \{g \in C([0,1]) : \|g - f\|_\infty < r\} \\ &= \big\{g \in C([0,1]) : |f(x) - g(x)| < r \text{ per ogni } x \in [0,1]\big\}\end{aligned}$$

è l'insieme delle funzioni continue g il cui grafico è contenuto nella striscia di spessore $2r$ attorno al grafico di f.

Teorema 1.2 (Scambio dei limiti). Siano (X,d) uno spazio metrico ed $f, f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, funzioni. Supponiamo che:

(i) $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$;

(ii) Ogni funzione f_n è continua nel punto $x_0 \in X$.

Allora esistono e sono uguali i seguenti limiti

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x). \tag{1.1}$$

In particolare, f è continua in x_0.

Dim. Dobbiamo provare che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per la convergenza uniforme esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha per ogni $x \in X$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$$

Scegliamo un $n \geq \bar{n}$. Per la continuità di f_n in x_0 esiste $\delta > 0$ tale che

$$d(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3.$$

Dunque, per $d(x, x_0) < \delta$ avremo

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Questo prova la continuità di f nel punto x_0 e con ciò la formula sullo scambio dei limiti (1.1).

$\square$

Se le funzioni f_n del Teorema 1.2 sono continue in ogni punto allora anche la funzione limite f sarà continua in ogni punto. Dunque si ha il seguente corollario.

Corollario 1.3. Siano (X, d) uno spazio metrico ed $f, f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, funzioni. Supponiamo che $f_n \in C(X)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e che $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. Allora, anche $f \in C(X)$.

Osservazione 1.4. La definizione di sup-norma, il Teorema sullo scambio dei limiti e il Corollario 1.3 possono essere riformulati per funzioni a valori in $\mathbb{R}^k$ per qualsiasi $k \geq 1$.

Il prossimo teorema, noto come Teorema di Dini, dà condizioni sufficienti per avere la convergenza uniforme.

Teorema 1.5 (Dini). Sia K uno spazio metrico compatto, e siano $f, f_n : K \to \mathbb{R}$ funzioni continue, $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che:

i) $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ per ogni $x \in K$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$;

ii) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ per ogni $x \in K$.

Allora, la convergenza in ii) è uniforme su K.

Dim. Supponiamo per assurdo che esista $\varepsilon > 0$ tale che $\|f_n - f\|_\infty > \varepsilon$ per infiniti $n \in \mathbb{N}$. Dunque esiste una selezione crescente di indici $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ed esistono punti $x_{n_k} \in K$ tali che

$$f(x_{n_k}) - f_{n_k}(x_{n_k}) > \varepsilon, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Siccome K è compatto, si può assumere senza perdere di generalità che esista $x_0 \in K$ tale che $x_{n_k} \to x_0 \in K$ per $k \to \infty$. Altrimenti, si estrae un'ulteriore sottosuccessione e ci si riconduce a questo caso.

Sia ora $m \in \mathbb{N}$ e sia $n_k \geq m$. Per la monotonia i) avremo $f_m(x_{n_k}) \leq f_{n_k}(x_{n_k})$, e dunque

$$f(x_{n_k}) - f_m(x_{n_k}) \geq f(x_{n_k}) - f_{n_k}(x_{n_k}) > \varepsilon, \quad \text{se } m \leq n_k.$$

Facendo tendere $k \to \infty$ e usando $x_{n_k} \to x_0$ insieme alla continuità di f ed f_m, si ottiene la disuguaglianza

$$f(x_0) - f_m(x_0) \geq \varepsilon, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Questo contraddice la ii) nel punto $x = x_0$. □

2. Criterio di Abel–Dirichlet per la convergenza uniforme

Partiamo dalla seguente formula di somma per parti.

Lemma 2.1. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali o complesse, supponiamo che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converga e poniamo $A_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} a_k$. Allora, per ogni $1 \leq M \leq N$ vale la formula di somma per parti

$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = A_M b_M - A_{N+1} b_N - \sum_{n=M+1}^{N} A_n (b_{n-1} - b_n).$$

Dim. La verifica è elementare:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=M}^{N} a_n b_n &= \sum_{n=M}^{N} (A_n - A_{n+1}) b_n \\
&= \sum_{n=M}^{N} A_n b_n - \sum_{n=M}^{N} A_{n+1} b_n = \sum_{n=M}^{N} A_n b_n - \sum_{n=M+1}^{N+1} A_n b_{n-1} \\
&= A_M b_M - A_{N+1} b_N + \sum_{n=M+1}^{N} A_n (b_n - b_{n-1}).
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.2 (Criterio di Abel–Dirichlet). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale o complessa tale che converga la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, e sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni a valori reali o complessi definite su un insieme X. Supponiamo che:

$$C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty \quad \text{e} \quad D = \sup_{x\in X} \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| < \infty.$$

Allora la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ converge uniformemente su X.

Dim. Poniamo $A_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ cosicchè $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$, per la convergenza della serie. Dati $n, p \in \mathbb{N}$, usando la formula di somma per parti si trova

$$\sum_{k=n}^{n+p} a_k f_k(x) = A_n f_n(x) - A_{n+p+1} f_{n+p}(x) + \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k \big(f_k(x) - f_{k-1}(x)\big).$$

Fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si ha $|A_n| \leq \varepsilon$ e quindi per ogni $p \in \mathbb{N}$ si ottiene

$$\sup_{x\in X} \Big| \sum_{k=n}^{n+p} a_k f_k(x) \Big| \leq \varepsilon(2C + D).$$

Poichè la successione delle somme parziali della serie in esame è uniformemente di Cauchy su X, la serie converge uniformemente su X. $\square$

Esempio 2.3 (Criterio di Abel). Se la serie di potenze complessa $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ converge nel punto $z_0 \in \mathbb{C}$, allora converge uniformemente sul segmento $[0, z_0] = \{x z_0 \in \mathbb{C} : 0 \leq x \leq 1\}$.

Per $x \in [0, 1]$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z_0^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x), \qquad a_n = b_n z_0^n, \quad f_n(x) = x^n.$$

La successione di funzioni $f_n(x) = x^n$ è uniformemente limitata su $[0, 1]$ e inoltre

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - x)x^n = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1) \\ 0 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

La convergenza uniforme sul segmento segue dal Teorema 2.2.

3. Convergenza uniforme e differenziabilità

Nel seguente teorema proveremo che se una successione di funzioni derivabili converge in un punto e le derivate convergono uniformemente, allora la successione converge uniformemente.

Teorema 3.1. Sia $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni derivabili. Supponiamo che:

i) Esista $x_0 \in [0, 1]$ tale che la successione $\big(f_n(x_0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
ii) La successione di funzioni $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente ad una funzione $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$.

Allora la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente su $[0, 1]$ ad una funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, f è derivabile ed $f'(x) = g(x)$ per ogni $x \in [0, 1]$.

Dim. Proviamo innanzi tutto che la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente. Sarà sufficiente verificare che la successione è uniformemente di Cauchy. Dati $n, m \in \mathbb{N}$, per il Teorema di Lagrange per ogni $x \in [0, 1]$ esiste $\xi \in [x_0, x]$ tale che

$$f_n(x) - f_m(x) = f_n(x_0) - f_m(x_0) + \big(f_n'(\xi) - f_m'(\xi)\big)(x - x_0).$$

Dunque, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n, m \geq \bar{n}$ si ha

$$\|f_n - f_m\|_\infty \leq |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + \|f'_n - f'_m\|_\infty.$$

In conclusione, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente su $[0,1]$ ad una funzione $f \in C([0,1])$.

Sia ora $\bar{x} \in [0,1]$ un punto generico, e definiamo le funzioni $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(\bar{x})}{x - \bar{x}} & \text{se } x \neq \bar{x} \\ f'_n(\bar{x}) & \text{se } x = \bar{x}. \end{cases}$$

Per la derivabilità di ciascuna f_n, le funzioni g_n sono continue.

Proviamo che la successione $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è uniformemente di Cauchy. Per $x \neq \bar{x}$ abbiamo

$$g_n(x) - g_m(x) = \frac{f_n(x) - f_n(\bar{x}) - (f_m(x) - f_m(\bar{x}))}{x - \bar{x}} = \frac{h(x) - h(\bar{x})}{x - \bar{x}},$$

dove abbiamo posto $h = f_n - f_m$, che è continua su $[0,1]$ e derivabile per $x \neq \bar{x}$. Per il Teorema di Lagrange esiste $\xi \in [x, \bar{x}]$ tale che $h(x) - h(\bar{x}) = h'(\xi)(x - \bar{x})$, e dunque

$$g_n(x) - g_m(x) = h'(\xi) = f'_n(\xi) - f'_m(\xi).$$

Si deduce che $\|g_n - g_m\|_\infty \leq \|f'_n - f'_m\|_\infty$ e dunque $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è uniformemente di Cauchy dal momento che lo è $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La conclusione è che la successione $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente.

Proviamo che f è derivabile e che $f' = g$. Per il Teorema sullo scambio dei limiti si ha

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\bar{x}} \frac{f_n(x) - f_n(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \lim_{x\to\bar{x}} \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(\bar{x})}{x - \bar{x}},$$

e dunque

$$\begin{aligned} g(\bar{x}) = \lim_{n\to\infty} f'_n(\bar{x}) &= \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\bar{x}} \frac{f_n(x) - f_n(\bar{x})}{x - \bar{x}} \\ &= \lim_{x\to\bar{x}} \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \lim_{x\to\bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = f'(\bar{x}). \end{aligned}$$

□

Riassumiamo il Teorema 3.1 nel seguente corollario.

Corollario 3.2 (Scambio di derivata e limite). *Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni derivabili su $[0,1]$. Supponiamo che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converga puntualmente e che $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converga uniformemente. Allora, per ogni $x \in [0,1]$ si ha*

$$\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n(x).$$

Applicando il Teorema 3.1 alla successione delle somme parziali, si prova il seguente teorema sulla derivazione sotto segno di serie.

Teorema 3.3 (Scambio di derivata e somma). *Sia $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni derivabili. Supponiamo che:*

i) *Esiste un punto $x_0 \in [0,1]$ tale che converga la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$;*

ii) La serie delle derivate $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ converge uniformemente su $[0,1]$.

Allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente su $[0,1]$, definisce una funzione derivabile, ed inoltre

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x).$$

Osservazione 3.4. La scelta di lavorare sull'intervallo $[0,1]$ fatta in questa sezione è di pura comodità. I teoremi valgono per qualsiasi intervallo (limitato o illimitato, aperto o chiuso) di $\mathbb{R}$.

4. Convergenza uniforme e integrale di Riemann

Vedremo ora che con la convergenza uniforme è possibile portare il limite sotto segno di integrale. Il Teorema 4.1, tuttavia è di uso limitato. Teoremi di passaggio al limite sotto segno di integrale molto più efficienti sono: 1) il Teorema della convergenza dominata; 2) il Teorema della convergenza monotona (o di Beppo Levi). Questi teoremi richiedono la teoria dell'integrale di Lebesgue e verranno visti nella parte B del corso.

Teorema 4.1 (Scambio di limite e integrale). Sia $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni Riemann-integrabili e sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione. Se $f_n \to f$ uniformemente su $[0,1]$ per $n \to \infty$, allora f è Riemann-integrabile e inoltre

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx. \tag{4.2}$$

Dim. Proviamo preliminarmente che la funzione f è limitata. Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, per la convergenza uniforme esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

e dunque per ogni $x \in [0,1]$ si ha

$$|f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x)| \leq \varepsilon + \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)|.$$

Questo prova la limitatezza di f.

Proviamo ora che f è Riemann-integrabile. Sia $\varepsilon > 0$ fissato, e mostriamo che esiste una scomposizione $\sigma = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = 1\}$ dell'intervallo $[0,1]$, per $m \in \mathbb{N}$ opportuno, tale che

$$S(f,\sigma) - s(f,\sigma) \leq \varepsilon,$$

dove

$$S(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{m} |I_i| \sup_{x\in I_i} f(x) \quad \text{e} \quad s(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{m} |I_i| \inf_{x\in I_i} f(x),$$

sono le somme superiori e inferiori di f relativamente a σ, $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ e $|I_i| = x_i - x_{i-1}$.

Sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$ per ogni $n \ge \bar{n}$. Si ha allora

$$S(f,\sigma) \le \sum_{i=1}^{m} |I_i| \sup_{x\in I_i}(f(x) - f_n(x)) + \sum_{i=1}^{m} |I_i| \sup_{x\in I_i} f_n(x) \le \varepsilon + S(f_n,\sigma),$$

e analogamente

$$s(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{m} |I_i| \inf_{x\in I_i}(f(x) - f_n(x)) + \sum_{i=1}^{m} |I_i| \inf_{x\in I_i} f_n(x) \ge -\varepsilon + s(f_n,\sigma).$$

Sottraendo membro a membro le due disuguaglianze si ottiene

$$S(f,\sigma) - s(f,\sigma) \le 2\varepsilon + S(f_n,\sigma) - s(f_n,\sigma).$$

Tale maggiorazione vale per una qualsiasi scomposizione σ e per ogni $n \ge \bar{n}$. Fissato un tale n, dal momento che f_n è Riemann-integrabile, possiamo scegliere la scomposizione σ in modo tale che $S(f_n,\sigma) - s(f_n,\sigma) \le \varepsilon$, e quindi

$$S(f,\sigma) - s(f,\sigma) \le 3\varepsilon.$$

Questo prova l'integrabilità di f.

Per provare la (4.2) è sufficiente osservare che fissato $\varepsilon > 0$ per $n \ge \bar{n}$ si ha

$$\Big| \int_0^1 f_n(x)dx - \int_0^1 f(x)dx \Big| = \Big| \int_0^1 (f_n(x) - f(x))dx \Big| \le \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|dx \le \varepsilon.$$

□

5. Esercizi

5.1. Convergenza uniforme.

Esercizio 1. Costruire funzioni $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tali che:
1) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
2) per ogni $-\infty \le a < b \le \infty$ la convergenza al punto 1) non è uniforme su (a,b).

Esercizio 2. Mostrare tramite esempi che ciascuna delle tre ipotesi: a) K compatto; b) f continua; e c) f_n continua per ogni $n \in \mathbb{N}$ è necessaria per la validità del Teorema 1.5.

Esercizio 3. Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni periodiche, ciascuna di periodo $T_n > 0$, tali che:
1) ogni f_n è continua;
2) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} T_n < \infty$;
3) $f_n \to f$ uniformemente su $\mathbb{R}$, per $n \to \infty$.

Provare che f è periodica.

Esercizio 4. a) La tesi nell'Esercizio 3 rimane valida anche solo con la convergenza puntuale invece che uniforme in 3). Provare questa affermazione o dare un controesempio.

b) La tesi nell'Esercizio 3 rimane valida anche senza l'ipotesi 2). Provare questa affermazione o dare un controesempio.

c) La tesi nell'Esercizio 3 rimane valida anche senza l'ipotesi 1). Provare questa affermazione o dare un controesempio.

Esercizio 5. Sappiamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha la convergenza puntuale

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n = \mathrm{e}^x.$$

Discutere la convergenza uniforme in tale limite.

Esercizio 6. Al variare di $x > 0$ studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-\log x)\log^n x,$$

e calcolarne la somma.

Esercizio 7. Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{nx^2-n^2x}.$$

Esercizio 8. Studiare la convergenza puntuale e uniforme su opportuni sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ della successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ così definita

$$f_n(x)=\frac{1+x^n}{n+x^{2n}},\quad x\in\mathbb{R}.$$

5.2. Convergenza uniforme e derivabilità.

Esercizio 9. Sia $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, la successione di funzioni

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\log(1+\mathrm{e}^{nx}),\quad x\in\mathbb{R}.$$

i) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
ii) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione delle derivate $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$.

Esercizio 10. Sia $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, la successione di funzioni

$$f_n(x)=\sqrt[n]{1+x^{2n}},\quad x\in\mathbb{R}.$$

i) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
ii) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione delle derivate $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$.

Esercizio 11. Sia $f:(-R,R)\to\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\quad x\in(-R,R),$$

dove $0<R\le\infty$ è il raggio di convergenza della serie di potenze. Provare che $f\in C^\infty(-R,R)$. Verificare inoltre che

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Esercizio 12. Per ogni $x\in(-1,1)$ calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n.$$

Esercizio 13. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n} + \cos x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Provare che $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Esercizio 14. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{(x^2-1)^n}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Provare che la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge uniformemente per $x \in [-1, 1]$.

ii) Provare che la serie delle derivate

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

converge per ogni $x \in [-1, 1]$, ma non converge uniformemente su $[-1, 1]$.

iii) Verificare che

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

per ogni $x \in [-1, 1]$, ed in particolare per $x = 0$.

5.3. Convergenza uniforme e integrale.

Esercizio 15. Costruire una funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tale che:
1) f è Riemann-integrabile.
2) Detto $A = \{x \in [0, 1] : \ f \text{ non è continua in } x\}$ l'insieme dei punti di discontinuità di f, si ha $\bar{A} = [0, 1]$.

Esercizio 16. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \Big(\frac{1}{n} + \sin^2 x\Big)^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Calcolare quindi il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi f_n(x)\, dx.$$

Esercizio 17. i) Provare che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1-t^2)^n dt = 0.$$

ii) Si consideri la successione di funzioni $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{\displaystyle\int_0^x (1-t^2)^n dt}{\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n dt}, \quad x \in [-1,1].$$

Calcolare il limite puntuale

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in [-1,1],$$

e discutere la convergenza uniforme.

Esercizio 18. Per ogni $x \in [-1,1)$ calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}.$$

Esercizio 19. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \int_1^n \frac{n}{ny^2 + x^2} dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Calcolare il limite puntuale

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

ii) Studiare la convergenza uniforme nel limite precedente.