# Analisi 2

Roberto Monti

Appunti del Corso - Versione del 11 Ottobre 2012

# Indice

CAPITOLO 1

# Programma

**Convergenza uniforme**: Sup-norma. Teorema dello scambio dei limiti, continuità del limite uniforme. Criterio di Abel-Dirichlet per la convergenza uniforme di serie. Teorema di Dini. Convergenza uniforme e differenziabilità, scambio di somma e derivata. Convergenza uniforme e integrale di Riemann, scambio di limite e integrale.

**Spazi metrici. Continuazione**: Tutte le norme in $\mathbb{R}^n$ sono equivalenti. Lo spazio $C(K)$ è completo. Spazio delle trasformazioni lineari e continue, norma di un operatore, caratterizzazione della continuità. Funzioni Lipschitziane. Teoremi di punto fisso ed applicazioni.

**Curve in $\mathbb{R}^n$.** Curve regolari. Vettore tangente. Lunghezza e curve rettificabili. Teorema di rettificabilità. Riparametrizzazione a lunghezza d'arco.

**Calcolo differenziale in $\mathbb{R}^n$.** Derivate parziali e direzionali. Funzioni differenziabili. Differenziale della funzione composta. Teoremi del valor medio. Funzioni di classe $C^1$. Punti critici e punti di max/min locale. Teorema di Rademacher. Derivate di ordine superiore. Teorema di Schwarz. Formula di Taylor.

**Equazioni differenziali ordinarie.** Equazioni lineari del primo ordine. Equazioni a variabili separabili. Problema di Cauchy. Esistenza e unicità locale della soluzione con ipotesi Lipschitz. Soluzioni massimali. Lemma di Gronwall e soluzioni globali. Studio qualitativo. Cenni alle equazioni alle derivate parziali.

**Teorema di Dini.** Diffeomorfismi e diffeomorfismi locali. Teorema di invertibilità locale. Teorema della funzione implicita.

**Sottovarietà differenziabili di $\mathbb{R}^n$.** Equazione locale e parametrizzazioni. Sottovarietà. Teorema di equivalenza. Spazio tangente e spazio normale.

CAPITOLO 2

# Convergenza uniforme

## 1. Convergenza uniforme e continuità

Siano $X$ un insieme ed $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione. Definiamo la "sup-norma" di $f$ su $X$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

La "sup-norma" verifica le seguenti proprietà elementari:

1) Si ha $\|f\|_\infty < \infty$ se e solo se $f$ è limitata su $X$.
2) Vale la subadittività:

$$\begin{aligned}\|f+g\|_\infty &= \sup_{x\in X} |f(x)+g(x)| \le \sup_{x\in X} |f(x)|+|g(x)| \\ &\le \sup_{x\in X} |f(x)| + \sup_{x\in X} |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.\end{aligned}$$

3) Sia $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni. La successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente su* $X$ alla funzione $f : X \to \mathbb{R}$ se

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Per questo motivo, la "norma" $\|\cdot\|_\infty$ si chiama anche "norma della convergenza uniforme".

4) Sia $X$ uno spazio metrico compatto e sia $f \in C(X)$. Per il Teorema di Weierstrass, la funzione $x \mapsto |f(x)|$ assume massimo su $K$. Dunque, nella definizione di sup-norma il sup può essere sostituito con un max:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)| = \max_{x\in X} |f(x)|.$$

È immediato controllare che lo spazio vettoriale $C(X)$ è normato da $\|\cdot\|_\infty$. Vedremo nel Teorema 2.1 che $C(X)$ è uno spazio di Banach.

Esempio 1.1 (Palla nella norma $\|\cdot\|_\infty$). Ad esempio, nel caso $X = [0,1]$ per ogni $f \in C([0,1])$ ed $r > 0$, la palla

$$\begin{aligned}B_r(f) &= \{g \in C([0,1]) : \|g-f\|_\infty < r\} \\ &= \big\{g \in C([0,1]) : |f(x)-g(x)| < r \text{ per ogni } x \in [0,1]\big\}\end{aligned}$$

è l'insieme delle funzioni continue $g$ il cui grafico è contenuto nella striscia di spessore $2r$ attorno al grafico di $f$.

Teorema 1.2 (Scambio dei limiti). Siano $(X,d)$ uno spazio metrico ed $f, f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, funzioni. Supponiamo che:

(i) $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$;

(ii) Ogni funzione $f_n$ è continua nel punto $x_0 \in X$.

Allora esistono e sono uguali i seguenti limiti

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x). \tag{1.1}$$

In particolare, $f$ è continua in $x_0$.

Dim. Dobbiamo provare che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per la convergenza uniforme esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha per ogni $x \in X$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$$

Scegliamo un $n \geq \bar{n}$. Per la continuità di $f_n$ in $x_0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$d(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3.$$

Dunque, per $d(x, x_0) < \delta$ avremo

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Questo prova la continuità di $f$ nel punto $x_0$ e con ciò la formula sullo scambio dei limiti (1.1).

□

Se le funzioni $f_n$ del Teorema 1.2 sono continue in ogni punto allora anche la funzione limite $f$ sarà continua in ogni punto. Dunque si ha il seguente corollario.

Corollario 1.3. Siano $(X, d)$ uno spazio metrico ed $f, f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, funzioni. Supponiamo che $f_n \in C(X)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e che $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. Allora, anche $f \in C(X)$.

Osservazione 1.4. La definizione di sup-norma, il Teorema sullo scambio dei limiti e il Corollario 1.3 possono essere riformulati per funzioni a valori in $\mathbb{R}^k$ per qualsiasi $k \geq 1$.

Il prossimo teorema, noto come Teorema di Dini, dà condizioni sufficienti per avere la convergenza uniforme.

Teorema 1.5 (Dini). Sia $K$ uno spazio metrico compatto, e siano $f, f_n : K \to \mathbb{R}$ funzioni continue, $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che:

i) $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ per ogni $x \in K$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$;
ii) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ per ogni $x \in K$.

Allora, la convergenza in ii) è uniforme su $K$.

Dim. Supponiamo per assurdo che esista $\varepsilon > 0$ tale che $\|f_n - f\|_\infty > \varepsilon$ per infiniti $n \in \mathbb{N}$. Dunque esiste una selezione crescente di indici $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ed esistono punti $x_{n_k} \in K$ tali che

$$f(x_{n_k}) - f_{n_k}(x_{n_k}) > \varepsilon, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Siccome $K$ è compatto, si può assumere senza perdere di generalità che esista $x_0 \in K$ tale che $x_{n_k} \to x_0 \in K$ per $k \to \infty$. Altrimenti, si estrae un'ulteriore sottosuccessione e ci si riconduce a questo caso.

Sia ora $m \in \mathbb{N}$ e sia $n_k \geq m$. Per la monotonia i) avremo $f_m(x_{n_k}) \leq f_{n_k}(x_{n_k})$, e dunque

$$f(x_{n_k}) - f_m(x_{n_k}) \geq f(x_{n_k}) - f_{n_k}(x_{n_k}) > \varepsilon, \quad \text{se } m \leq n_k.$$

Facendo tendere $k \to \infty$ e usando $x_{n_k} \to x_0$ insieme alla continuità di $f$ ed $f_m$, si ottiene la disuguaglianza

$$f(x_0) - f_m(x_0) \geq \varepsilon, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Questo contraddice la ii) nel punto $x = x_0$. □

## 2. Criterio di Abel–Dirichlet per la convergenza uniforme

Partiamo dalla seguente formula di somma per parti.

Lemma 2.1. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali o complesse, supponiamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converga e poniamo $A_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$. Allora, per ogni $1 \leq M \leq N$ vale la formula di somma per parti

$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = A_M b_M - A_{N+1} b_N - \sum_{n=M+1}^{N} A_n (b_{n-1} - b_n).$$

Dim. La verifica è elementare:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=M}^{N} a_n b_n &= \sum_{n=M}^{N} (A_n - A_{n+1}) b_n \\
&= \sum_{n=M}^{N} A_n b_n - \sum_{n=M}^{N} A_{n+1} b_n = \sum_{n=M}^{N} A_n b_n - \sum_{n=M+1}^{N+1} A_n b_{n-1} \\
&= A_M b_M - A_{N+1} b_N + \sum_{n=M+1}^{N} A_n (b_n - b_{n-1}).
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.2 (Criterio di Abel–Dirichlet). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale o complessa tale che converga la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, e sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni a valori reali o complessi definite su un insieme $X$. Supponiamo che:

$$C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty \quad \text{e} \quad D = \sup_{x\in X} \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| < \infty.$$

Allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ converge uniformemente su $X$.

Dim. Poniamo $A_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ cosicchè $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$, per la convergenza della serie. Dati $n, p \in \mathbb{N}$, usando la formula di somma per parti si trova

$$\sum_{k=n}^{n+p} a_k f_k(x) = A_n f_n(x) - A_{n+p+1} f_{n+p}(x) + \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k\big(f_k(x) - f_{k-1}(x)\big).$$

Fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si ha $|A_n| \leq \varepsilon$ e quindi per ogni $p \in \mathbb{N}$ si ottiene

$$\sup_{x\in X} \Big| \sum_{k=n}^{n+p} a_k f_k(x) \Big| \leq \varepsilon(2C + D).$$

Poichè la successione delle somme parziali della serie in esame è uniformemente di Cauchy su $X$, la serie converge uniformemente su $X$. □

Esempio 2.3 (Criterio di Abel). Se la serie di potenze complessa $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ converge nel punto $z_0 \in \mathbb{C}$, allora converge uniformemente sul segmento $[0, z_0] = \{x z_0 \in \mathbb{C} : 0 \leq x \leq 1\}$.

Per $x \in [0, 1]$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z_0^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x), \qquad a_n = b_n z_0^n, \quad f_n(x) = x^n.$$

La successione di funzioni $f_n(x) = x^n$ è uniformemente limitata su $[0, 1]$ e inoltre

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - x)x^n = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1) \\ 0 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

La convergenza uniforme sul segmento segue dal Teorema 2.2.

## 3. Convergenza uniforme e differenziabilità

Nel seguente teorema proveremo che se una successione di funzioni derivabili converge in un punto e le derivate convergono uniformemente, allora la successione converge uniformemente.

Teorema 3.1. Sia $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni derivabili. Supponiamo che:

i) Esista $x_0 \in [0, 1]$ tale che la successione $\big(f_n(x_0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
ii) La successione di funzioni $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente ad una funzione $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$.

Allora la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente su $[0, 1]$ ad una funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f$ è derivabile ed $f'(x) = g(x)$ per ogni $x \in [0, 1]$.

Dim. Proviamo innanzi tutto che la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente. Sarà sufficiente verificare che la successione è uniformemente di Cauchy. Dati $n, m \in \mathbb{N}$, per il Teorema di Lagrange per ogni $x \in [0, 1]$ esiste $\xi \in [x_0, x]$ tale che

$$f_n(x) - f_m(x) = f_n(x_0) - f_m(x_0) + \big(f_n'(\xi) - f_m'(\xi)\big)(x - x_0).$$

Dunque, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n, m \geq \bar{n}$ si ha

$$\|f_n - f_m\|_\infty \leq |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + \|f_n' - f_m'\|_\infty.$$

In conclusione, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente su $[0,1]$ ad una funzione $f \in C([0,1])$.

Sia ora $\bar{x} \in [0,1]$ un punto generico, e definiamo le funzioni $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(\bar{x})}{x - \bar{x}} & \text{se } x \neq \bar{x} \\ f_n'(\bar{x}) & \text{se } x = \bar{x}. \end{cases}$$

Per la derivabilità di ciascuna $f_n$, le funzioni $g_n$ sono continue.

Proviamo che la successione $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è uniformemente di Cauchy. Per $x \neq \bar{x}$ abbiamo

$$g_n(x) - g_m(x) = \frac{f_n(x) - f_n(\bar{x}) - (f_m(x) - f_m(\bar{x}))}{x - \bar{x}} = \frac{h(x) - h(\bar{x})}{x - \bar{x}},$$

dove abbiamo posto $h = f_n - f_m$, che è continua su $[0,1]$ e derivabile per $x \neq \bar{x}$. Per il Teorema di Lagrange esiste $\xi \in [x, \bar{x}]$ tale che $h(x) - h(\bar{x}) = h'(\xi)(x - \bar{x})$, e dunque

$$g_n(x) - g_m(x) = h'(\xi) = f_n'(\xi) - f_m'(\xi).$$

Si deduce che $\|g_n - g_m\|_\infty \leq \|f_n' - f_m'\|_\infty$ e dunque $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è uniformemente di Cauchy dal momento che lo è $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$. La conclusione è che la successione $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente.

Proviamo che $f$ è derivabile e che $f' = g$. Per il Teorema sullo scambio dei limiti si ha

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\bar{x}} \frac{f_n(x) - f_n(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \lim_{x\to\bar{x}} \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(\bar{x})}{x - \bar{x}},$$

e dunque

$$\begin{aligned} g(\bar{x}) = \lim_{n\to\infty} f_n'(\bar{x}) &= \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\bar{x}} \frac{f_n(x) - f_n(\bar{x})}{x - \bar{x}} \\ &= \lim_{x\to\bar{x}} \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \lim_{x\to\bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = f'(\bar{x}). \end{aligned}$$

□

Riassumiamo il Teorema 3.1 nel seguente corollario.

Corollario 3.2 (Scambio di derivata e limite). Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni derivabili su $[0,1]$. Supponiamo che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converga puntualmente e che $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converga uniformemente. Allora, per ogni $x \in [0,1]$ si ha

$$\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n(x).$$

Applicando il Teorema 3.1 alla successione delle somme parziali, si prova il seguente teorema sulla derivazione sotto segno di serie.

Teorema 3.3 (Scambio di derivata e somma). Sia $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni derivabili. Supponiamo che:

i) Esiste un punto $x_0 \in [0,1]$ tale che converga la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$;

ii) La serie delle derivate $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ converge uniformemente su $[0,1]$.

Allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente su $[0,1]$, definisce una funzione derivabile, ed inoltre

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x).$$

Osservazione 3.4. La scelta di lavorare sull'intervallo $[0,1]$ fatta in questa sezione è di pura comodità. I teoremi valgono per qualsiasi intervallo (limitato o illimitato, aperto o chiuso) di $\mathbb{R}$.

## 4. Convergenza uniforme e integrale di Riemann

Vedremo ora che con la convergenza uniforme è possibile portare il limite sotto segno di integrale. Il Teorema 4.1, tuttavia è di uso limitato. Teoremi di passaggio al limite sotto segno di integrale molto più efficienti sono: 1) il Teorema della convergenza dominata; 2) il Teorema della convergenza monotona (o di Beppo Levi). Questi teoremi richiedono la teoria dell'integrale di Lebesgue e verranno visti nella parte B del corso.

Teorema 4.1 (Scambio di limite e integrale). Sia $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni Riemann-integrabili e sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione. Se $f_n \to f$ uniformemente su $[0,1]$ per $n \to \infty$, allora $f$ è Riemann-integrabile e inoltre

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx. \tag{4.2}$$

Dim. Proviamo preliminarmente che la funzione $f$ è limitata. Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, per la convergenza uniforme esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

e dunque per ogni $x \in [0,1]$ si ha

$$|f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x)| \leq \varepsilon + \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)|.$$

Questo prova la limitatezza di $f$.

Proviamo ora che $f$ è Riemann-integrabile. Sia $\varepsilon > 0$ fissato, e mostriamo che esiste una scomposizione $\sigma = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = 1\}$ dell'intervallo $[0,1]$, per $m \in \mathbb{N}$ opportuno, tale che

$$S(f,\sigma) - s(f,\sigma) \leq \varepsilon,$$

dove

$$S(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{m} |I_i| \sup_{x\in I_i} f(x) \quad \text{e} \quad s(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{m} |I_i| \inf_{x\in I_i} f(x),$$

sono le somme superiori e inferiori di $f$ relativamente a $\sigma$, $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ e $|I_i| = x_i - x_{i-1}$.

Sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$ per ogni $n \ge \bar{n}$. Si ha allora

$$S(f,\sigma) \le \sum_{i=1}^{m} |I_i| \sup_{x\in I_i}(f(x) - f_n(x)) + \sum_{i=1}^{m} |I_i| \sup_{x\in I_i} f_n(x) \le \varepsilon + S(f_n,\sigma),$$

e analogamente

$$s(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{m} |I_i| \inf_{x\in I_i}(f(x) - f_n(x)) + \sum_{i=1}^{m} |I_i| \inf_{x\in I_i} f_n(x) \ge -\varepsilon + s(f_n,\sigma).$$

Sottraendo membro a membro le due disuguaglianze si ottiene

$$S(f,\sigma) - s(f,\sigma) \le 2\varepsilon + S(f_n,\sigma) - s(f_n,\sigma).$$

Tale maggiorazione vale per una qualsiasi scomposizione $\sigma$ e per ogni $n \ge \bar{n}$. Fissato un tale $n$, dal momento che $f_n$ è Riemann-integrabile, possiamo scegliere la scomposizione $\sigma$ in modo tale che $S(f_n,\sigma) - s(f_n,\sigma) \le \varepsilon$, e quindi

$$S(f,\sigma) - s(f,\sigma) \le 3\varepsilon.$$

Questo prova l'integrabilità di $f$.

Per provare la (4.2) è sufficiente osservare che fissato $\varepsilon > 0$ per $n \ge \bar{n}$ si ha

$$\Big| \int_0^1 f_n(x)dx - \int_0^1 f(x)dx \Big| = \Big| \int_0^1 (f_n(x) - f(x))dx \Big| \le \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|dx \le \varepsilon.$$

□

## 5. Esercizi

### 5.1. Convergenza uniforme.

Esercizio 1. Costruire funzioni $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tali che:
1) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
2) per ogni $-\infty \le a < b \le \infty$ la convergenza al punto 1) non è uniforme su $(a,b)$.

Esercizio 2. Mostrare tramite esempi che ciascuna delle tre ipotesi: a) $K$ compatto; b) $f$ continua; e c) $f_n$ continua per ogni $n \in \mathbb{N}$ è necessaria per la validità del Teorema 1.5.

Esercizio 3. Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni periodiche, ciascuna di periodo $T_n > 0$, tali che:
1) ogni $f_n$ è continua;
2) $\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n < \infty$;
3) $f_n \to f$ uniformemente su $\mathbb{R}$, per $n \to \infty$.

Provare che $f$ è periodica.

Esercizio 4. a) La tesi nell'Esercizio 3 rimane valida anche solo con la convergenza puntuale invece che uniforme in 3). Provare questa affermazione o dare un controesempio.

b) La tesi nell'Esercizio 3 rimane valida anche senza l'ipotesi 2). Provare questa affermazione o dare un controesempio.

c) La tesi nell'Esercizio 3 rimane valida anche senza l'ipotesi 1). Provare questa affermazione o dare un controesempio.

Esercizio 5. Sappiamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha la convergenza puntuale
$$\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n = \mathrm{e}^x.$$
Discutere la convergenza uniforme in tale limite.

Esercizio 6. Al variare di $x > 0$ studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-\log x)\log^n x,$$
e calcolarne la somma.

Esercizio 7. Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni
$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{nx^2-n^2x}.$$

Esercizio 8. Studiare la convergenza puntuale e uniforme su opportuni sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ della successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ così definita
$$f_n(x) = \frac{1+x^n}{n+x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**5.2. Convergenza uniforme e derivabilità.**

Esercizio 9. Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, la successione di funzioni
$$f_n(x) = \frac{1}{n}\log(1+\mathrm{e}^{nx}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
ii) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione delle derivate $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$.

Esercizio 10. Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, la successione di funzioni
$$f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
ii) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione delle derivate $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$.

Esercizio 11. Sia $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ la funzione
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in (-R, R),$$
dove $0 < R \le \infty$ è il raggio di convergenza della serie di potenze. Provare che $f \in C^\infty(-R, R)$. Verificare inoltre che
$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 12. Per ogni $x \in (-1, 1)$ calcolare la somma della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n.$$

Esercizio 13. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n} + \cos x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Provare che $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Esercizio 14. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{(x^2-1)^n}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Provare che la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge uniformemente per $x \in [-1, 1]$.

ii) Provare che la serie delle derivate

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

converge per ogni $x \in [-1, 1]$, ma non converge uniformemente su $[-1, 1]$.

iii) Verificare che

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

per ogni $x \in [-1, 1]$, ed in particolare per $x = 0$.

### 5.3. Convergenza uniforme e integrale.

Esercizio 15. Costruire una funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tale che:
1) $f$ è Riemann-integrabile.
2) Detto $A = \big\{x \in [0, 1] : \ f \text{ non è continua in } x\big\}$ l'insieme dei punti di discontinuità di $f$, si ha $\bar{A} = [0, 1]$.

Esercizio 16. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \Big(\frac{1}{n} + \sin^2 x\Big)^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Calcolare quindi il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi f_n(x)\, dx.$$

Esercizio 17. i) Provare che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1-t^2)^n dt = 0.$$

ii) Si consideri la successione di funzioni $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{\displaystyle\int_0^x (1-t^2)^n dt}{\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n dt}, \quad x \in [-1,1].$$

Calcolare il limite puntuale

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in [-1,1],$$

e discutere la convergenza uniforme.

Esercizio 18. Per ogni $x \in [-1,1)$ calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}.$$

Esercizio 19. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \int_1^n \frac{n}{ny^2 + x^2} dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Calcolare il limite puntuale

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

ii) Studiare la convergenza uniforme nel limite precedente.

CAPITOLO 3

# Spazi metrici. Continuazione

## 1. Spazi di Banach di dimensione finita

Sia $(V, \|\cdot\|_V)$ uno spazio normato reale di dimensione finita $n \geq 1$. Fissiamo una base $\mathrm{v}_1, \dots, \mathrm{v}_n$ di $V$. La trasformazione $\varphi : \mathbb{R}^n \to V$

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n x_i \mathrm{v}_i, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

è un isomorfismo vettoriale. Definiamo su $\mathbb{R}^n$ la norma

$$\|x\| = \|\varphi(x)\|_V, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Verificare che $\|\cdot\|$ sia una norma su $\mathbb{R}^n$ è un facile esercizio. Gli spazi normati $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ e $(V, \|\cdot\|_V)$ sono isomorfi come spazi vettoriali e isometrici, con isometria $\varphi$, come spazi metrici. Nel seguito, non è dunque restrittivo limitare la discussione ad $\mathbb{R}^n$.

Proposizione 1.1. Due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ su $\mathbb{R}^n$ sono equivalenti. Ovvero, esistono due costanti $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$ tali che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1. \tag{1.3}$$

Dim. Senza perdere di generalità, possiamo supporre che

$$\|x\|_1 = |x| = \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{1/2}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Affermiamo che la funzione $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, $f(x) = \|x\|_2$, è continua rispetto alla distanza standard di $\mathbb{R}^n$. Infatti, dalla subadittività della norma segue segue

$$|f(x+h) - f(x)| = \big|\|x+h\|_2 - \|x\|_2\big| \leq \|h\|_2, \quad x, h \in \mathbb{R}^n.$$

D'altra parte, indicando con $\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_n$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$, si ha

$$\|h\|_2 = \Big\|\sum_{i=1}^n h_i \mathrm{e}_i\Big\|_2 \leq \sum_{i=1}^n |h_i|\|\mathrm{e}_i\|_2 \leq M \sum_{i=1}^n |h_i|,$$

con $M = \max\{\|\mathrm{e}_1\|_2, \dots, \|\mathrm{e}_n\|_2\}$. Dunque, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|h| < \delta$ implica $\|h\|_2 < \varepsilon$, e quindi anche $|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$. In effetti abbiamo provato che $f$ è uniformemente continua.

La sfera unitaria $K = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ è un insieme compatto, e quindi per il Teorema di Weierstrass la funzione $f : K \to [0, \infty)$ ammette massimo e minimo: esistono $y, z \in K$ tali che

$$0 < C_1 = \|y\|_2 \leq \|x\|_2 \leq \|z\|_2 = C_2 < \infty, \quad x \in K.$$

La disuguaglianza generele (1.3) segue per omogeneità. $\square$

Esempio 1.2 (Norme $\|\cdot\|_p$). Per $p \geq 1$ definiamo

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{1/p}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Quando $p = \infty$ definiamo

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Lo spazio $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ è normato. Proviamo la proprietà più impegnativa da verificare, la subadditività.

Siano $1 \leq p, q \leq \infty$ tali che $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Le norme $\|\cdot\|_p$ e $\|\cdot\|_q$ verificano la seguente disuguaglianza di Minkowski:

$$\langle x, y\rangle \leq \|x\|_p\|y\|_q, \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{1.4}$$

che vale anche nel caso $p = 1$ e $q = \infty$. Si tratta di una generalizzazione della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Per provare la disuguaglianza (1.4) si seguano le indicazioni dell'Esercizio **??**.

Veniamo alla subadittività. Per $x, y \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1}|x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1}(|x_i| + |y_i|) \\
&= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1}|x_i| + \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1}|y_i| \\
&\leq \|x\|_p\Big(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q}\Big)^{1/q} + \|y\|_q\Big(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q}\Big)^{1/q} \\
&= (\|x\|_p + \|y\|_q)\Big(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\Big)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Riordinando la disuguaglianza ottenuta si trova

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

## 2. Alcuni spazi funzionali

**2.1. Funzioni continue su un compatto.** Proviamo che lo spazio delle funzioni continue su un compatto munito della sup-norma è uno spazio di Banach.

Teorema 2.1. Sia $(K, d)$ uno spazio metrico compatto. Lo spazio $X = C(K)$ con la norma della convergenza uniforme:

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in K} |f(x)|$$

è uno spazio di Banach.

Dim. Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $X$. Per ogni $x \in K$ fissato, la successione $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$ e quindi è convergente. Esiste un numero $f(x) \in \mathbb{R}$ tale che $f_n(x) \to f(x)$ per $n \to \infty$ e risulta così definita una funzione $f : K \to \mathbb{R}$. Proviamo che:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0. \tag{2.5}$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ fissato, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $x \in K$ vale

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \text{per } m, n \geq \bar{n}.$$

Facendo tendere $m \to \infty$ e usando la convergenza $f_m(x) \to f(x)$ per $m \to \infty$ si ottiene, per ogni $x \in K$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{per } m, n \geq \bar{n}.$$

Questo prova l'affermazione (2.5).

Per il Teorema 1.3, $f : K \to \mathbb{R}$ è continua, ovvero $f \in X$.

□

**2.2. Lo spazio $C^1([0, 1])$.** Lo spazio vettoriale

$$C^1([0, 1]) = \big\{ f : [0, 1] \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ è derivabile con continuità su } [0, 1] \big\}.$$

munito della norma

$$\|f\|_{C^1([0,1])} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

è uno spazio di Banach. Si veda l'Esercizio **??**. In effetti, anche

$$\|f\|_* = |f(0)| + \|f'\|_\infty,$$

è una norma su $C^1([0, 1])$ che lo rende completo. Tale norma è equivalente alla precedente.

**2.3. Esempio di spazio non completo.** Consideriamo lo spazio vettoriale $X = C([0, 1])$ delle funzioni continue a valori reali definite sull'intervallo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. La funzione $\| \cdot \|_1 : X \to [0, \infty)$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$$

è una norma, detta *norma della convergenza* $L^1([0, 1])$. La verifica delle proprietà della norma è elementare. Ad esempio, la subadittività della norma $\| \cdot \|_1$ segue dalla subadittività del valore assoluto e dalla monotonia dell'integrale. Precisamente, per $f, g \in X$ si ha

$$\|f+g\|_1 = \int_0^1 |f(x)+g(x)| dx \leq \int_0^1 \big(|f(x)|+|g(x)|\big) dx = \int_0^1 |f(x)| dx + \int_0^1 |g(x)| dx.$$

La palla centrata nella funzione nulla $f = 0$

$$B_r(0) = \Big\{ g \in C([0, 1]) : \int_0^1 |g(x)| dx < r \Big\}$$

è l'insieme delle funzioni continue $g$ con integrale di $|g|$ minore di $r > 0$.

La distanza fra due funzioni $f, g \in X$ è

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

Proviamo che $(X, d)$ non è uno spazio metrico completo.

Per $n \in \mathbb{N}$ sia $f_n \in C([0,1])$ la funzione così definita

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1/2] \\ n(x-1/2) & x \in [1/2, 1/2+1/n] \\ 1 & x \in [1/2+1/n, 1]. \end{cases}$$

La successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy. Infatti, dati $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \geq n$ risulta

$$d(f_m, f_n) = \int_0^1 |f_n - f_m| dx \leq \int_{1/2}^{1/2+1/n} (|f_n| + |f_m|) dx \leq \frac{2}{n}.$$

La candidata funzione limite è la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1/2] \\ 1 & x \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

In effetti, la funzione $f$ è Riemann-integrabile su $[0,1]$ e risulta

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx = 0,$$

ma $f$ non è in $C([0,1])$ perchè ha un punto di discontinuità. Dunque la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non converge ad un elemento di $X$.

D'altra parte, sappiamo che ogni spazio metrico ammette un completamento, e ci si può dunque chiedere qual è il completamento di $(C([0,1]), \|\cdot\|_1)$. Per rispondere occorre sviluppare la teoria dell'integrale di Lebesgue (seconda parte del corso). Il completamento è l'insieme delle funzioni Lebesgue-integrabili su $[0,1]$.

**2.4. Funzioni Lipschitziane.** Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme. Per ogni funzione $f : A \to \mathbb{R}$ definiamo

$$\mathrm{Lip}(f) = \inf \Big\{ L > 0 : \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \leq L, \quad x, y \in A,\, x \neq y \Big\},$$

e diciamo che $f$ è Lipschitziana su $A$ se $\mathrm{Lip}(f) < \infty$. Posto $L = \mathrm{Lip}(f)$ avremo allora

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|, \quad x, y \in A.$$

Dunque, le funzioni Lipschitziane sono uniformemente continue.

L'insieme $\mathrm{Lip}(A)$ delle funzioni Lipschitziane su $A$ a valori in $\mathbb{R}^m$ è un sottospazio vattoriale di $C(A)$.

Un corollario del Teorema di Ascoli-Arzelà è il seguente fatto. Supponiamo che $A \subset \mathbb{R}^n$ sia compatto. Allora l'insieme

$$\big\{ f \in C(A) : \|f\|_\infty \leq 1 \text{ e } \mathrm{Lip}(f) \leq 1 \big\}$$

è un sottoinsieme *compatto* di $C(A)$ munito della norma della convergenza uniforme.

## 3. Teoremi di punto fisso

Sia $X$ un insieme e sia $T : X \to X$ una funzione da $X$ in se stesso. Siamo interessati all'esistenza di soluzioni $x \in X$ dell'equazione $T(x) = x$. Un simile elemento $x \in X$ si dice *punto fisso* di $T$.

### 3.1. Teorema delle contrazioni.

DEFINIZIONE 3.1 (Contrazione). Sia $(X, d)$ uno spazio metrico. Un'applicazione $T : X \to X$ è una *contrazione* se esiste un numero $0 < \lambda < 1$ tale che $d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y)$ per ogni $x, y \in X$.

Le contrazioni sono Lipschitziane e dunque uniformemente continue.

TEOREMA 3.2 (Banach). Sia $(X, d)$ uno spazio metrico completo e sia $T : X \to X$ una contrazione. Allora esiste un unico punto $x \in X$ tale che $x = T(x)$.

Dim. Sia $x_0 \in X$ un qualsiasi punto e si definisca la successione $x_n = T^n(x_0) = T \circ \ldots \circ T(x_0)$, $n$-volte. Proviamo che la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy. Infatti, per la disuguaglianza triangolare si ha per ogni $n, k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leq \sum_{h=1}^{k} d(x_{n+h}, x_{n+h-1}) = \sum_{h=1}^{k} d(T^{n+h}(x_0), T^{n+h-1}(x_0)) \\ &\leq d(T(x_0), x_0) \sum_{h=1}^{k} \lambda^{n+h-1} \leq \lambda^n d(T(x_0), x_0) \sum_{h=1}^{\infty} \lambda^{h-1}. \end{aligned}$$

La serie converge e $\lambda^n \to 0$ per $n \to \infty$, dal momento che $\lambda < 1$. Poichè $X$ è completo, esiste un punto $x \in X$ tale che $x = \lim_{n\to\infty} T^n(x_0)$.

Proviamo che $x = T(x)$. La funzione $T : X \to X$ è continua e quindi abbiamo

$$x = \lim_{n\to\infty} T^n(x_0) = \lim_{n\to\infty} T(T^{n-1}(x_0)) = T(\lim_{n\to\infty} T^{n-1}(x_0)) = T(x).$$

Proviamo infine che il punto fisso è unico. Sia $\bar{x} \in X$ tale che $\bar{x} = T(\bar{x})$. Allora abbiamo

$$d(x, \bar{x}) = d(T(x), T(\bar{x})) \leq \lambda d(x, \bar{x}) \quad \Rightarrow \quad d(x, \bar{x}) = 0,$$

perchè $\lambda < 1$, e quindi $x = \bar{x}$.

□

La dimostrazione del Teorema di Banach è costruttiva e può essere implementata in un calcolatore.

TEOREMA 3.3. Sia $(X, d)$ uno spazio metrico completo e sia $T : X \to X$ un'applicazione tale che per qualche $n \in \mathbb{N}$ l'iterazione $T^n$ è una contrazione. Allora esiste un unico $x \in X$ tale che $x = T(x)$.

Dim. Per il Teorema di Banach esiste un unico $x \in X$ tale che $T^n(x) = x$. Allora, per qualche $0 \leq \lambda < 1$, si ha

$$d(x, T(x)) = d(T^n(x), T(T^n(x))) = d(T^n(x), T^n(T(x))) \leq \lambda d(x, T(x)),$$

e quindi $d(x, T(x)) = 0$, che è equivalente a $T(x) = x$.

Supponiamo che esista un secondo punto fisso $y \in X$, con $y = T(y)$. Allora si ha anche $y = T^n(y)$ e pertanto $x = y$, dall'unicità del punto fisso di $T^n$.

□

### 3.2. Teoremi di Brouwer e di Schauder.

Teorema 3.4 (Brouwer). Sia $K \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, una palla chiusa in e sia $T : K \to K$ continua. Allora esiste $x \in K$ tale che $T(x) = x$.

In questi casi, il punto fisso tipicamente non è unico. Per $n = 1$ il teorema precedente ha una dimostrazione elementare. Per $n = 2$, la dimostrazione migliore è si basa sulla nozione di omotopia. Per $n \geq 3$, esistono dimostrazioni basate sull'omologia. Per una dimostrazione analitica, si veda Evans, *Partial Differential Equations*, p.441. Il Teorema di Brouwer si estende alla dimensione infinita.

Teorema 3.5 (Schauder). Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach e sia $K \subset X$ un insieme non-vuoto, chiuso e convesso. Sia $T : K \to K$ un'applicazione tale che:

i) $T$ è continua;
ii) $\overline{T(K)} \subset K$ è compatto.

Allora esiste $x \in K$ tale che $T(x) = x$.

Per una dimostrazione, si veda Evans, *Partial Differential Equations*, p.502.

## 4. Trasformazioni lineari e continue

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati reali. Per ogni trasformazione (operatore) lineare $T : X \to Y$ definiamo

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y.$$

Se $\|T\| < \infty$ diremo che $T$ è una trasformazione *limitata* e chiameremo $\|T\|$ la *norma* di $T$. Indichiamo con

$$\mathcal{L}(X, Y) = \big\{T : X \to Y \,|\, \text{lineare e limitata}\big\},$$

l'insieme delle trasformazioni lineari e limitate da $X$ a $Y$. Con le naturali operazioni di somma fra applicazioni e di moltiplicazione per uno scalare, $\mathcal{L}(X, Y)$ è uno spazio vettoriale reale. Osserviamo che dalla definizione di $\|T\|$ segue immediatamente la disuguaglianza

$$\|Tx\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X, \quad x \in X. \tag{4.6}$$

Proviamo che $\|\cdot\|$ è una norma:

i) Se $T = 0$ è l'applicazione nulla, allora $\|T\| = 0$. Se viceversa $\|T\| = 0$ allora dalla (4.6) segue che $\|Tx\|_Y = 0$ per ogni $x \in X$, e quindi $T = 0$.
ii) Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$\|\lambda T\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|(\lambda T)x\|_Y = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|\lambda(Tx)\|_Y = |\lambda| \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y = |\lambda|\|T\|.$$

iii) Infine verifichiamo la subadittività. Se $T, S \in \mathcal{L}(X, Y)$ allora

$$\begin{aligned}\|T + S\| &= \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|(S + T)x\|_Y = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Sx + Tx\|_Y \\ &\leq \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Sx\|_Y + \|Tx\|_Y \leq \|S\| + \|T\|.\end{aligned}$$

Proposizione 4.1. Sia $T : X \to Y$ lineare. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

A) $T$ è limitata;
B) $T$ è continua in 0;
C) $T$ è continua da $X$ a $Y$.

Dim. A)⇒C). Se $T$ è limitata, allora per ogni punto $x_0 \in X$ si ha

$$\|Tx - Tx_0\|_Y = \|T(x - x_0)\|_Y \leq \|T\| \|x - x_0\|_X,$$

e quindi $T$ è continua in $x_0$. In effetti, $T$ è Lipschitziana.

C)⇒B) è banale. Proviamo che B)⇒A). Se $T$ è continua in 0 allora per ogni $\varepsilon > 0$ (ad esempio per $\varepsilon = 1$) esiste $\delta > 0$ tale che

$$\|x\|_X \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \|Tx\|_Y \leq \varepsilon = 1.$$

Dunque, se $\|x\|_X \leq 1$ si ha $\delta\|Tx\|_Y = \|T(\delta x)\|_Y \leq 1$, da cui $\|Tx\|_Y \leq 1/\delta$. Segue che $\|T\| \leq 1/\delta < \infty$.

□

Osservazione 4.2. Alla luce della proposizione precedente, possiamo equivalentemente definire

$$\mathcal{L}(X, Y) = \big\{T : X \to Y \,|\, \text{lineare e continua}\big\}.$$

Osservazione 4.3. Se $X$ e $Y$ sono di dimensione finita, allora la linearità implica automaticamente la continuità. Questo segue dal fatto che una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è della forma

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

per opportuni $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, ovvero è un polinomio omogeneo di grado 1.

Qundo $X$ oppure $Y$ (oppure entrambi) non sono di dimensione finita, allora la linearità non implica la limitatezza (Esercizio **??**).

Gli argomenti di questa sezione e della precedente sono il punto di partenza del corso di *Analisi funzionale*.