ESERCIZIO. Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} e^{nx^2 - n^2 x} .$$

Soluzione. Per $x = 0$ non c'è convergenza.

Per $x < 0$ si ha

$$\lim_{n \to \infty} nx^2 - n^2 x = \lim_{n \to \infty} n^2 \left(-x + \frac{1}{n} x^2 \right) = \infty$$

e quindi

$$\lim_{n \to \infty} e^{nx^2 - n^2 x} = \infty .$$

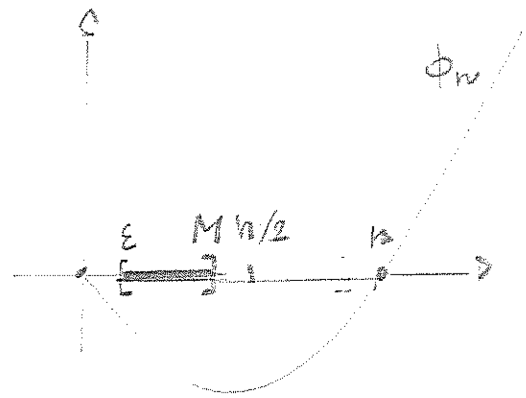
Dunque, per $x < 0$ la serie non converge.

Studio la funzione $\phi_n(x) = nx^2 - n^2 x$ (parabola):

$$\phi_n'(x) = 2nx - n^2 = 0 \iff x = \frac{n}{2}$$

Inoltre,

$$\phi_n(x) = 0 \iff nx^2 - n^2 x = 0$$
$$\iff x = 0 \text{ oppure } nx = n^2$$
$$\iff x = 0 \text{ oppure } x = n$$



Fissiamo $\varepsilon > 0$ piccolo ed $M > 0$ grande, e comunque $\varepsilon < M$.
Se $n > M$ si ha

$$\max_{x \in [\varepsilon, M]} \phi_n(x) = \max \{ \phi_n(\varepsilon), \phi_n(M) \}$$

$$= \phi_n(\varepsilon) \quad \text{se} \quad M \leq \frac{n}{2}$$

(definitivamente vera)

$$= n\,\varepsilon^2 - n^2 \varepsilon$$

$$= n^2 \left(-\varepsilon + \frac{1}{n}\, \varepsilon^2 \right)$$

$$\leq n^2 \cdot \left(-\frac{\varepsilon}{2} \right)$$

se $-\varepsilon + \frac{1}{n} \varepsilon^2 \leq -\frac{\varepsilon}{2} \iff \frac{1}{n} \varepsilon^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \iff 2\varepsilon \leq n$.
(Vera definitiv.)

Dunque, per $n \geq 2M$ si ha

$$\max_{x \in [\varepsilon, M]} e^{n x^2 - n^2 x} = e^{\max_{x \in [\varepsilon, M]} n x^2 - n^2 x} \leq$$

$$\leq e^{-\frac{\varepsilon}{2} n^2}$$

Dal momento che

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon}{2} n^2} < \infty \qquad (\forall \varepsilon > 0),$$

Per il Criterio di Weierstrass la serie $(*)$ converge uniformemente su $[\varepsilon, M]$, per ogni $0 < \varepsilon < M < \infty$.
In particolare c'è convergenza puntuale $\forall x > 0$. □

<u>Esercizio</u>: Provare che
- Non c'è conv. uniforme su $[\varepsilon, \infty)$.
- Non c'è conv. uniforme su $(0, M)$.

ESERCIZIO. Discutere la convergenza uniforme nel limite

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x , \qquad x\geq 0 .$$

Soluzione. Formiamo la differenza

$$\phi_n(x) = e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n , \qquad x\geq 0$$

Sappiamo che $n \longmapsto \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ è crescente, e dunque $\phi_n \geq 0$ su $[0,\infty)$.

Inoltre

$$\begin{aligned}\phi_n'(x) &= e^x - n\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}\\ &= e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} \geq\\ &\geq e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \phi_n(x) \geq 0 .\end{aligned}$$

Fissato $M>0$ si ha dunque, essendo ϕ_n crescente,

$$\sup_{x\in[0,M]}\phi_n(x) = \max_{x\in[0,M]}\phi_n(x) = \phi_n(M) .$$

D'altra parte $\lim_{n\to\infty}\phi_n(M) = 0$ e quindi in $(*)$ si ha convergenza uniforme su ogni intervallo $[0,M]$.
Non si ha convergenza uniforme su $[0,\infty)$ in quanto, per ogni n fissato, si ha

$$\lim_{x\to\infty}\phi_n(x) = \lim_{x\to\infty} e^x\left(1-\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{e^x}\right) = \infty .$$

$\square$

Esercizio Siano $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni, $n \in \mathbb{N}$, tali che:

(1) f_n è continua e $T_n > 0$ periodica;

(2) $\sup_{n \in \mathbb{N}} T_n < \infty$;

(3) $\lim_{n \to \infty} \| f_n - f \|_\infty = 0$.

Provare che f è periodica.

Soluzione. Si ha $f \in C(\mathbb{R})$ in quanto limite uniforme di funzioni continue.

La successione $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata e quindi ha una sottosuccessione convergente:

$$\lim_{k \to \infty} T_{n_k} = T \in [0, \infty).$$

Vogliamo passare al limite nell'identità

$$(*) \qquad f_{n_k}(x + T_{n_k}) = f_{n_k}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chiaramente $\lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Affermo che $\lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x + T_{n_k}) = f(x+T)$.

Per la continuità di f:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \left| f(x+T) - f(x+T_{n_k}) \right| < \varepsilon \text{ se } |T - T_{n_k}| < \delta$$

Esiste $\bar{K} \in \mathbb{N}$ tale che $|T - T_{n_k}| < \delta \ \forall k \geq \bar{K}$ e inoltre

$$\| f_{n_k} - f \|_\infty < \varepsilon \quad \text{per} \quad k \geq \bar{K}.$$

In conclusione:

$$\left| f_{n_k}(x + T_{n_k}) - f(x+T) \right| \leq \left| f_{n_k}(x + T_{n_k}) - f(x + T_{n_k}) \right| + \left| f(x + T_{n_k}) - f(x+T) \right| < 2\varepsilon \quad \forall k \geq \bar{K}.$$

Quindi passando al limite per $K \to \infty$ in $(*)$ si ottiene

$$f(x+T) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se $T > 0$ questo prova che f è periodica,

Se $T = 0$ questa informazione è vuota.

<u>Esercizio</u>: Discutere il caso $T = 0$

<u>Esercizio</u> Lasciamo cadere l'ipotesi (2): $\sup_{n \in \mathbb{N}} T_n < \infty$,

É ancora vero che f è periodica?

Esercizio. Per $x \in (-1,1)$ calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n , \quad -1 < x < 1$$

Soluzione. Il raggio di convergenza è $R = 1$.

Partiamo la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} , \quad -1 < x < 1 ,$$

Ho convergenza uniforme su $[-\delta, \delta]$ $\forall 0<\delta<1$.

Derivo

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} .$$

Operazione lecita, in questo la serie delle derivate converge uniformemente su $[-\delta, \delta]$ con $0<\delta<1$.

Ottengo l'identità

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n , \quad -1 < x < 1 .$$

Posso derivare sotto il segno di serie

$$\frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{d}{dx} \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} .$$

Si ottiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = x \frac{(1-x)+2x}{(1-x)^3} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} , \quad -1 < x < 1 .$$

$\square$