ESERCIZIO Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y^3 = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}.$$

i) Provare che esiste un'unica soluzione locale;
ii) Provare che la soluzione è definita per $x \in \mathbb{R}$;
iii) Provare che la soluzione è pari;
iv) Provare che la soluzione è periodica.

SOLUZIONE i) Poniamo $z = y'$, di modo che $z' = y'' = -2y^3$.
Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -2y^3 \\ y(0) = 1 \\ z(0) = 0 \end{cases}.$$

Siccome $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(y,z) = (z, -2y^3)$ è di classe C^∞ allora è localmente di Lipschitz in (y,z).
Dunque esiste un'unica soluzione locale.

ii) Moltiplichiamo $y'' + 2y^3 = 0$ per y':

$$y''y' + 2y^3y' = 0$$

ovvero
$$\left(\frac{1}{2}(y')^2\right)' + 2\left(\frac{1}{4}y^4\right)' = 0 .$$

Deduciamo che $(y')^2 + y^4 = \text{costante} = (y'(0))^2 + (y(0))^4 = 1$

Di conseguenza
$$|y(x)| \le 1$$
$$|z(x)| = |y'(x)| \le 1 , \quad \forall x \in \text{dominio della soluzione}$$

Per il criterio di prolungamento la soluzione (y,z) è definita su tutto $\mathbb{R}$.

iii) Sia $\eta(x) = y(-x)$, $x \in \mathbb{R}$. Ovviamente
$$\eta(0) = y(0) = 1 \quad e \quad \eta'(0) = -y'(0) = 0$$
e inoltre $\eta''(x) = y''(-x)$. Dunque $\eta'' + 2\eta^3 = 0$ su $\mathbb{R}$. Per unicità della soluzione $\eta = y$, e quindi y è pari.

iv) Nella regione del piano $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; y > 0\}$ la soluzione y è strettamente concava.
Quindi esiste $\bar{x} \in \mathbb{R}$, $\bar{x} > 0$, tale che
$$y(x) > 0 \quad \text{per } -\bar{x} < x < \bar{x} \quad e$$
$$y(\pm\bar{x}) = 0 .$$
Inoltre $y'(\bar{x}) = -1$. Questo segue da $y'^2 + y^4 = 1$.

La funzione

$$w(x) = -y(x-2\bar{x}) \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

verifica:

$$w(\bar{x}) = -y(-\bar{x}) = 0$$
$$w'(\bar{x}) = -y'(-\bar{x}) = -1 .$$

Per unicità: $y = w$ e quindi

$$y(x) = -y(x-2\bar{x}) \quad \forall x \in \mathbb{R} .$$

da cui

$$y(x) = -y(x-2\bar{x}) = +y(x-4\bar{x})$$

per $x \in \mathbb{R}$, e quindi y è $4\bar{x}$ periodica.

$\square$

<u>Esercizio.</u> Sia $\varrho \in C([0,\infty))$ una funzione tale che

$$\int_0^\infty |\varrho(x)|\,dx < \infty,$$

e sia $y \in C^2([0,\infty))$ la soluzione di

$$\begin{cases} y'' + y = \varrho(x) y, & x \geq 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Provare che esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $|y(x)| \leq M$ $\forall x \geq 0$.

Soluzione. Moltiplichiamo l'equazione differenziale per y':

$$y''y' + yy' = \varrho(x) yy', \quad x \geq 0,$$

ovvero

$$\left[(y')^2\right]' + \left[y^2\right]' = \varrho(x)\, 2yy'.$$

Integrando su $[0,x]$

$$(*) \qquad y'(x)^2 + y(x)^2 = 1 + \int_0^x \varrho(t)\, 2yy'\,dt$$
$$\leq 1 + \int_0^x |\varrho(t)| \left(y(t)^2 + y'(t)^2\right) dt$$

e quindi la funzione $\varphi(x) = y'(x)^2 + y(x)^2$, $x \geq 0$, verifica

$$0 \leq \varphi(x) \leq 1 + \int_0^x |\varrho(t)|\, \varphi(t)\,dt := \Phi(x).$$

La funzione $\bar{\Phi}$ è in C^1 e inoltre

$$\bar{\Phi}'(x) = |g(x)|\,\varphi(x) \leq |g(x)|\,\bar{\Phi}(x) \quad , \quad x \geq 0 .$$

Dividendo per $\bar{\Phi}(x) \geq 1$ e integrando su $[0, x]$ si trova

$$\log\left(\frac{\bar{\Phi}(x)}{\bar{\Phi}(0)}\right) \leq \int_0^x |g(t)|\,dt \quad , \quad x \geq 0 ,$$

e siccome $\bar{\Phi}(0) = 1$ si ottiene

$$\bar{\Phi}(x) \leq e^{\int_0^x |g(t)|\,dt} \leq e^{\int_0^\infty |g(t)|\,dt} := M .$$

Poiché $\varphi(x) \leq \bar{\Phi}(x)$ si trova

$$y'(x)^2 + y(x)^2 = \varphi(x) \leq M < \infty$$

per ogni $x \geq 0$

$\square$