<u>Esercizio</u> Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme non vuoto. Provare che la funzione distanza $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$

$$f(x) = \operatorname{dist}(x,A) := \inf_{z \in A} |x - z|$$

è 1-Lipschitziana.

Risoluzione. Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $z \in A$. Allora

$$\operatorname{dist}(x,A) \leq |x - z| \leq |x - y| + |y - z| .$$

Facendo l'inf per $z \in A$ si trova

$$\operatorname{dist}(x,A) \leq |x-y| + \operatorname{dist}(y,A) .$$

Scambiando x con y si trova

$$\operatorname{dist}(y,A) \leq |x-y| + \operatorname{dist}(x,A) .$$

Mettendo insieme si ottiene

$$\left| \operatorname{dist}(x,A) - \operatorname{dist}(y,A) \right| \leq |x-y| , \qquad x,y \in \mathbb{R}^n .$$

$\square$

__Esercizio__ Determinare tutti i numeri $\alpha \geq 0$ tali che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt{1 + \alpha x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

sia una contrazione rispetto alla distanza Euclidea.

__Risoluzione__. Dati $x, y \in \mathbb{R}$, per il Teorema di Lagrange esiste $\xi \in [x, y]$ tale che

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$$

dove

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1 + \alpha x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \alpha 2x = \frac{\alpha x}{\sqrt{1 + \alpha x^2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

e quindi, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$|f'(x)| = \frac{\alpha |x|}{\sqrt{1 + \alpha x^2}} \leq \frac{\alpha |x|}{\sqrt{\alpha}|x|} = \sqrt{\alpha}.$$

Di conseguenza

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y| \leq \sqrt{\alpha}\, |x - y|,$$

e per $\alpha < 1$, f è una contrazione.

Proviamo che per $\alpha \geq 1$, f non è una contrazione in quanto non ha punti fissi. Se, infatti, fosse $x = f(x)$ per qualche $x \in \mathbb{R}$ allora

$$x = \sqrt{1 + \alpha x^2} \implies x^2 = 1 + \alpha x^2 \implies x^2(1 - \alpha) = 1$$

Siccome $1 - \alpha \leq 0$, questo è una contraddizione.

$\square$

Esercizio Sia $h \in C([0,1])$ una funzione assegnata. Verificare che l'equazione funzionale

$$f(x) = h(x) + \frac{1}{2}\sin(x)\int_0^x f(t)\,dt, \quad x \in [0,1],$$

ha un'unica soluzione.

Risoluzione. $X = C([0,1])$ con la sup-norma è uno spazio di Banach. Definiamo l'applicazione $T : X \to X$

$$(Tf)(x) = h(x) + \frac{1}{2}\sin(x)\int_0^x f(t)\,dt, \quad x \in [0,1].$$

Osserviamo che $f \in C([0,1]) \implies x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ è $C^1([0,1])$. Quindi, è effettivamente $Tf \in C([0,1])$.

Se proviamo che T è una contrazione su X con la sup-norma, allora per il Teorema di Banach T ha un unico punto fisso su X.

Siano $f, g \in X$. Allora

$$Tf(x) - Tg(x) = \frac{1}{2}\sin(x)\int_0^x f(t)\,dt - \frac{1}{2}\sin(x)\int_0^x g(t)\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\sin(x)\int_0^x \big(f(t) - g(t)\big)\,dt$$

e dunque

$$|Tf(x) - Tg(x)| \leq \frac{1}{2}\int_0^x |f(t) - g(t)|\,dt$$
$$\leq \frac{1}{2} x \,\|f-g\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|f-g\|_\infty$$

e in conclusione $\|Tf - Tg\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|f-g\|_\infty$.

T è contrazione di fattore $\lambda = 1/2$.

$\square$

Esercizio Sia $X = C([0,1])$ munito della sup-norma, e sia $K : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Definiamo l'applicazione $T : X \longrightarrow X$

$$(Tf)(s) = \int_0^1 K(s,t) f(t)\, dt, \quad f \in X.$$

i) Provare che $s \longmapsto (Tf)(s)$ è continua (ovvero $Tf \in X$);

ii) Provare che $T \in \mathcal{L}(X,X)$;

iii) Dare condizioni su K affinché T sia una contrazione.

Risoluzione. i) K è uniformemente continua su $[0,1]\times[0,1]$ per il Teorema di Heine - Cantor:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \quad |(s,t) - (\bar{s},\bar{t})| < \delta \implies |K(s,t) - K(\bar{s},\bar{t})| < \varepsilon.$$

Segue che:

$$\begin{aligned} |T(f)(s) - T(f)(\bar{s})| &= \left| \int_0^1 (K(s,t) - K(\bar{s},t)) f(t)\, dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |K(s,t) - K(\bar{s},t)|\, |f(t)|\, dt \\ &\leq \varepsilon \, \|f\|_\infty \quad \text{se } |s-\bar{s}| < \delta. \end{aligned}$$

ii) T è lineare, per la linearità dell'integrale.
Proviamo che T è limitata. Sia $f \in X$ con $\|f\|_\infty \leq 1$.
Allora

$$\begin{aligned} |(Tf)(s)| &\leq \int_0^1 |K(s,t)|\, |f(t)|\, dt \\ &\leq \|f\|_\infty \max_{(s,t)\in[0,1]\times[0,1]} |K(s,t)| \leq \|K\|_\infty \end{aligned}$$

e quindi $\|T\| \leq \|K\|_\infty < \infty$.

iii) Se $\|K\|_\infty < 1$ allora T è una contrazione. $\square$