ESERCIZIO Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = e^{3x} - 3ye^x + y^3 .$$

Determinare i punti critici e i punti di min|max locale e globale.

SOLUZIONE. É certamente $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Il gradiente è

$$f_x(x,y) = 3e^{3x} - 3ye^x$$

$$f_y(x,y) = -3e^x + 3y^2 ,$$

e quindi

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} e^{3x} - ye^x = 0 \\ -e^x + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = e^{2x} \\ y^2 = e^x \end{cases} \implies e^{4x} = e^{2x} \iff x = 0$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

c'è un unico punto critico. La matrice Hessiana è

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 9e^{3x} - 3ye^x & -3e^x \\ -3e^x & 6y \end{pmatrix}$$

e quindi nel punto $(0,1)$:

$$Hf(0,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Determinante

$$\det Hf(0,1) = 36 - 9 > 0$$

Traccia

$$\operatorname{tr} Hf(0,1) = 12 > 0$$

Deduciamo che $Hf(0,1) > 0$.

Quindi $(0,1)$ è un p.to di minimo locale stretto.

Vediamo se è un p.to di minimo globale:

$$\lim_{y \to -\infty} f(0,y) = \lim_{y \to -\infty} (1 - 3y + y^3) = -\infty,$$

Quindi $(0,1)$ non è un p.to di minimo globale.

$\square$

ESERCIZIO Al variare del parametro $\lambda \geq 0$ si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^2 + \lambda xy + \frac{1}{2} y^4 .$$

Determinare i punti critici e i punti di min|max locale e globale di f.

SOLUZIONE É certamente $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Il gradiente è

$$\nabla f(x,y) = \left(2x + \lambda y \, , \; \lambda x + 2y^3 \right).$$

Quindi

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 2x + \lambda y = 0 \\ \lambda x + 2y^3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -\frac{\lambda}{2} y \\ -\frac{\lambda^2}{2} y + 2y^3 = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione ha la soluzione $y = 0$ (che implica $x = 0$) e poi

$$y^2 = \frac{\lambda^2}{4} \iff y = \pm \frac{\lambda}{2}$$

e quindi

$$x = -\frac{\lambda}{2} y = \mp \frac{\lambda^2}{4} .$$

Conclusione:

- se $\lambda = 0$ c'è un punto critico $(x,y) = (0,0)$
- se $\lambda > 0$ ci sono tre punti critici

$$(0,0) , \quad \underbrace{\left(-\frac{\lambda^2}{4} , \frac{\lambda}{2} \right)}_{= P_1} , \quad \underbrace{\left(\frac{\lambda^2}{4} , -\frac{\lambda}{2} \right)}_{= P_2}$$

La matrice Hessiana è

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 6y^2 \end{bmatrix}$$

Caso $\lambda = 0$. In $(0,0)$:

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0 .$$

In effetti $f(x,y) = x^2 + \frac{1}{2} y^4$ e quindi $(0,0)$ è il punto (unico) di min assoluto.

Caso $\lambda > 0$. In $(0,0)$

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \det &= -\lambda^2 < 0 \\ \operatorname{tr} &= 2 > 0 \end{aligned}$$

Gli autovalori hanno segno opposto. Dunque $(0,0)$ non è né punto di min loc né di max loc. In $(0,0)$ c'è un punto di sella.

Nel punto $\left(-\frac{\lambda^2}{4}, \frac{\lambda}{2}\right)$:

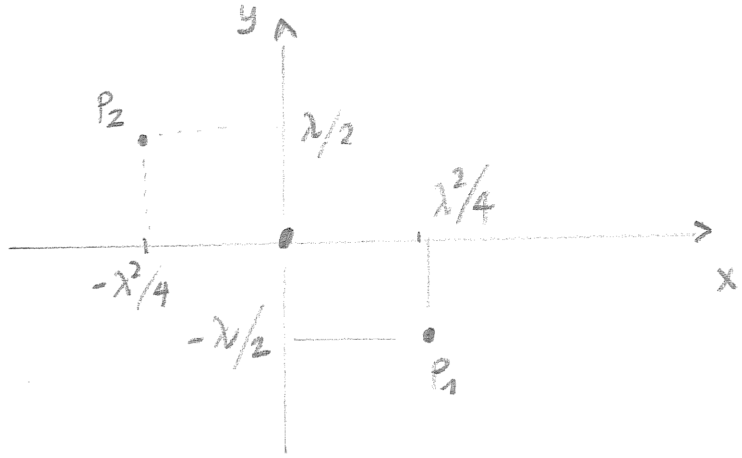
$$Hf\left(-\frac{\lambda^2}{4}, \frac{\lambda}{2}\right) = \begin{bmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & \frac{3}{2}\lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$\det = 3\lambda^2 - \lambda^2 = 2\lambda^2 > 0$$

$$\operatorname{tr} = 2 + \frac{3}{2}\lambda^2 > 0 .$$

Quindi $Hf(-\lambda^2/4, \lambda/2) > 0$ e si ha un punto

di minimo locale stretto.
Analoga situazione nel punto $\left(\frac{\lambda^2}{4}, -\frac{\lambda}{2} \right)$.



In p_1 e p_2, f assume lo stesso valore
(invarianza per $(x,y) \longrightarrow (-x,-y)$).
Proviamo che p_1 e p_2 sono punti di minimo globale.
Sappiamo che

$$xy \leq \frac{1}{q} x^q + \frac{1}{p} y^p \qquad x,y \geq 0$$

con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, e quindi

$$xy \leq \frac{1}{q} \frac{1}{\varepsilon^q} |x|^q + \frac{\varepsilon^p}{p} |y|^p \quad , \; x,y \in \mathbb{R},$$

dove $\varepsilon > 0$ è un parametro da scegliere.
Se $p = 4$ allora $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Avremo

$$f(x,y) = x^2 + \lambda xy + \frac{1}{2} y^4 \geq x^2 - \lambda \frac{4}{3} \frac{1}{\varepsilon^{4/3}} |x|^{4/3} -$$

$$- \lambda \frac{1}{4} \varepsilon^4 y^4 + \frac{y^4}{2}$$

Riordiniamo:

$$f(x,y) \geq x^2 - \frac{4\lambda}{3\varepsilon^{4/3}}|x|^{4/3} + y^4\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda\varepsilon^4}{4}\right).$$

Scegliamo $\varepsilon > 0$ tale che

$$\frac{1}{2} - \frac{\lambda\varepsilon^4}{4} > 0.$$

Per confronto

$$\lim_{|(x,y)| \to \infty} f(x,y) = \infty.$$

Deduciamo che per ogni $R > 0$, l'insieme

$$K_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ f(x,y) \leq R\}$$

è chiuso e limitato. Inoltre per $R \geq 0$

$$\min_{\mathbb{R}^2} f = \min_{K_R} f \quad \text{è assunto.}$$

Dunque

$$f \text{ ha p.ti di min globale} \Rightarrow \text{sono p.ti critici} \Rightarrow \text{sono } P_1 \text{ e } P_2.$$

$\square$