Esercizio Siano $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ ed $f \in C(\bar{A}) \cap C^1(A)$ con $f_x, f_y \in UC(A)$, uniformemente continue su A. Provare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ esistono

(1) $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t,0) - f(x,0)}{t},$$

(2) $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x,t) - f(x,0)}{t}.$$

Soluzione. Proviamo (1). Siccome $f_x \in UC(A)$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ esiste il limite

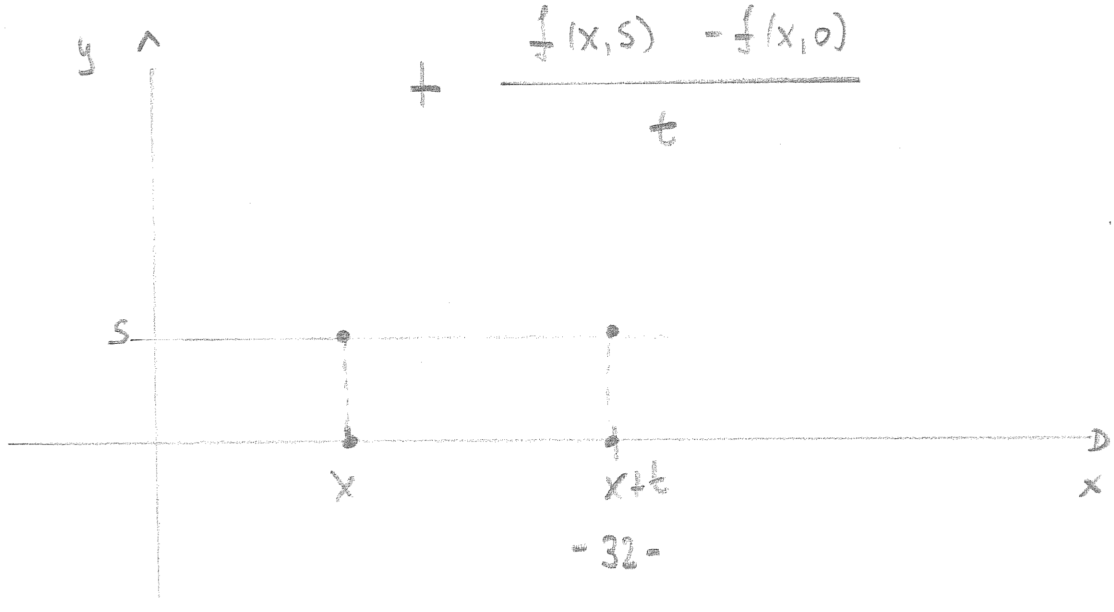
$$\lim_{\substack{(x,y) \to (x_0,0) \\ y>0}} f_x(x,y) = g(x_0,0).$$

Fissiamo $t>0$. Allora, per $s>0$ si ha

$$\frac{f(x+t,0) - f(x,0)}{t} = \frac{f(x+t,0) - f(x+t,s)}{t} +$$

$$+ \frac{f(x+t,s) - f(x,s)}{t} +$$

$$+ \frac{f(x,s) - f(x,0)}{t}$$



Possiamo scegliere $s = s(t) > 0$ tale che

$$\left| \frac{f(x+t,s) - f(x+t,0)}{t} \right| < |t|,$$

$(s = s(t))$

$$\left| \frac{f(x,s) - f(x,0)}{t} \right| < |t|.$$

Qui usiamo il fatto che $f \in C(\bar{A})$,

Per il Teorema di Lagrange esiste $t^* \in (0,t)$ tale che

$$\frac{f(x+t, s(t)) - f(x, s(t))}{t} = f_x(x+t^*, s(t)).$$

La scelta di $s(t)$ può essere fatta in modo tale che

$$\lim_{t \to 0} s(t) = 0.$$

Di conseguenza

$$\lim_{t \to 0} f_x(x+t^*, s(t)) = g(x,0),$$

e si conclude che

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+t, 0) - f(x,0)}{t} = g(x,0).$$

$\square$

Esercizio Fissati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sia $X = \{ \varphi \in C^1([0,1]) : \varphi(0) = \alpha$ e $\varphi(1) = \beta \}$. Sia poi $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(\varphi) = \int_0^1 \sqrt{1+\varphi'(t)^2}\, dt .$$

(1) Provare che se F ammette minimo, allora questo è unico.

(2) Determinare il minimo.

Soluzione. La funzione $\mathcal{L}(s) = \sqrt{1+s^2}$, $s \in \mathbb{R}$, è strettamente convessa:

$$\mathcal{L}'(s) = \frac{s}{(1+s^2)^{1/2}}$$

$$\mathcal{L}''(s) = \frac{(1+s^2)^{1/2} - s \dfrac{s}{(1+s^2)^{1/2}}}{(1+s^2)}$$

$$= \frac{1}{(1+s^2)^{3/2}} > 0 \qquad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Siano $\varphi, \psi \in X$ con $\varphi \neq \psi$. Allora esiste $t \in [0,1]$ tale che $\varphi'(t) \neq \psi'(t)$. Altrimenti:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi' = \psi' \text{ su } [0,1] \\ \varphi(0) = \psi(0) \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi = \psi \text{ su } [0,1],$$

Dunque, siccome $\varphi, \psi \in C^1([0,1])$ esiste $I \subset [0,1]$ intervallo tale che $\varphi' \neq \psi'$ su I.

Supponiamo che φ e ψ siano entrambi minimi: $F(\varphi) = F(\psi)$.

Allora:
$$F\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right) = \int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{\varphi'+\psi'}{2}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_I \sqrt{1+(\,''\,)^2}\, dt + \int_{[0,1]\setminus I} \sqrt{1+(\,''\,)^2}\, dt$$

$$\wedge \qquad\qquad\qquad\qquad \leq$$

$$\int_I \frac{1}{2}\sqrt{1+\varphi'^2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+\psi'^2}\, dt \qquad \int_{[0,1]\setminus I} \frac{1}{2}\sqrt{1+\varphi'^2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+\psi'^2}$$

e di conseguenza

$$F\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right) < \frac{1}{2}F(\varphi) + \frac{1}{2}F(\psi) = F(\varphi),$$

assurdo.

(2) Data $\varphi \in X$, sia $\gamma_\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la curva

$$\gamma_\varphi(t) = (t, \varphi(t)).$$

Per la formula della lunghezza

$$\int_0^1 \sqrt{1+\varphi'^2}\,dt = V(\gamma_\varphi) = \sup_{0=t_0<t_1<\ldots<t_n=1} \sum_{i=1}^n |\gamma_\varphi(t_i) - \gamma_\varphi(t_{i-1})|$$

$$\geq \sup_{0=t_0<t_1<\ldots<t_n=1} \left| \sum_{i=1}^n \gamma_\varphi(t_i) - \gamma_\varphi(t_{i-1}) \right| =$$

$$= |\gamma_\varphi(t_n) - \gamma_\varphi(t_0)| = |(1,\beta) - (0,\alpha)|$$

$$= \sqrt{1+(\beta-\alpha)^2} \, .$$

Il segmento $\gamma(t) = (t, \alpha + t(\beta-\alpha))$, $t \in [0,1]$

che corrisponde a $\varphi(t) = \alpha + t(\beta - \alpha)$

ha variazione totale

$$V(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{1+\varphi'^2} = \sqrt{1+(\beta-\alpha)^2} \, ,$$

Dunque l'unico minimo di F su X è

$$\varphi(t) = \alpha + t(\beta-\alpha) \, .$$

$\square$