ESERCIZIO Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} \\ \\ y(1) = 1 . \end{cases}$$

i) Provare che il problema ha un'unica soluzione $y \in C^1(0,\infty)$ definita su tutto $(0,\infty)$.

ii) Disegnare un grafico della soluzione (approssimativo).

SOLUZIONE La funzione $f(x,y) = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}$ è definita per $xy \neq 0$. Tenuto conto del dato iniziale consideriamo

$$\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y > 0 \}$$

e avremo $f \in C^\infty(\Omega)$. In particolare, f è localmente di Lipschitz in y in Ω. Dunque esiste $\delta > 0$ tale che il problema ha una soluzione locale unica

$$y \in C^1(-\delta+1, 1+\delta).$$

Dobbiamo provare che y si estende su $(0,\infty)$.

Studiamo il segno della funzione f. Abbiamo

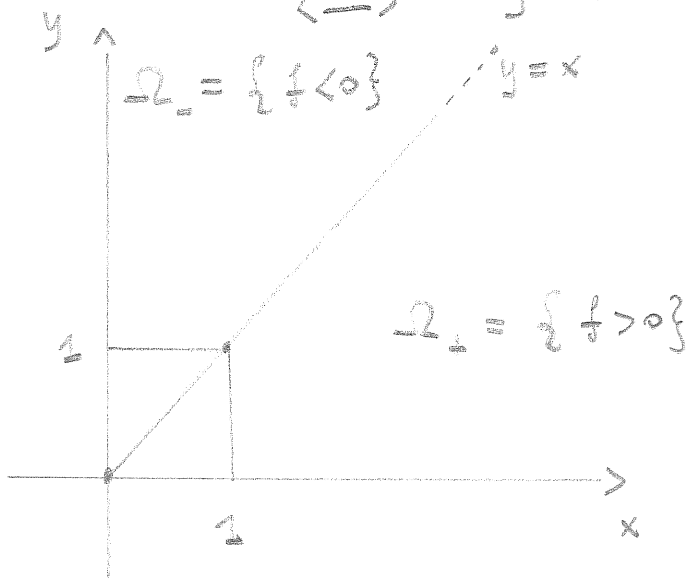
$$f(x,y) = 0 \iff \frac{1}{y} = \frac{1}{x}$$
$$\iff y = x$$

Inoltre, nella regione Ω si ha

$$f(x,y) > 0 \iff \frac{1}{y} - \frac{1}{x} > 0$$

$$\iff \frac{1}{y} > \frac{1}{x}$$

$$\iff y < x$$



Nella regione Ω_+ la soluzione y è crescente.
Nella regione Ω_- la soluzione y è decrescente.

Dunque $y(x) \geq 1$ per ogni x nell'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

Sia $K \subset (0,\infty)$ un compatto. Se $x \in K$ e $y \geq 1$

$$|f(x,y)| = \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{x}$$

$$\leq 1 + \max_{x \in K} \frac{1}{x} < \infty$$

Per il Criterio di esistenza globale la soluzione massimale è definita su tutto $(0, \infty)$.

Proviamo che $y(x) < x$ per ogni $x > 1$. Per assurdo sia $\bar{x} > 1$ un punto (il minimo punto) tale che $y(\bar{x}) = \bar{x}$. Allora $y(x) < x$ per ogni $1 < x < \bar{x}$.

Siccome

$$y(\bar{x}) = \bar{x} \implies y'(\bar{x}) = 0$$

posto $\phi(x) = y(x) - x$ avremo $\phi'(\bar{x}) = -1$ e $\phi(\bar{x}) = 0$ e quindi $\phi(x) > 0$ per $\bar{x} - \varepsilon < x < \bar{x}$ per qualche $\varepsilon > 0$, ovvero $y(x) > x$ per $\bar{x} - \varepsilon < x < \bar{x}$, Assurdo.

Calcoliamo la derivata seconda:

$$y'' = \frac{-y'}{y^2} + \frac{1}{x^2} = -\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}$$

Dunque:

$$y'' > 0 \iff \frac{1}{x^2} > \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{y^2} \iff y^2 > x^2 \frac{x-y}{xy}$$

$$\iff y^3 > x^2 - xy \iff x^2 - xy - y^3 < 0$$

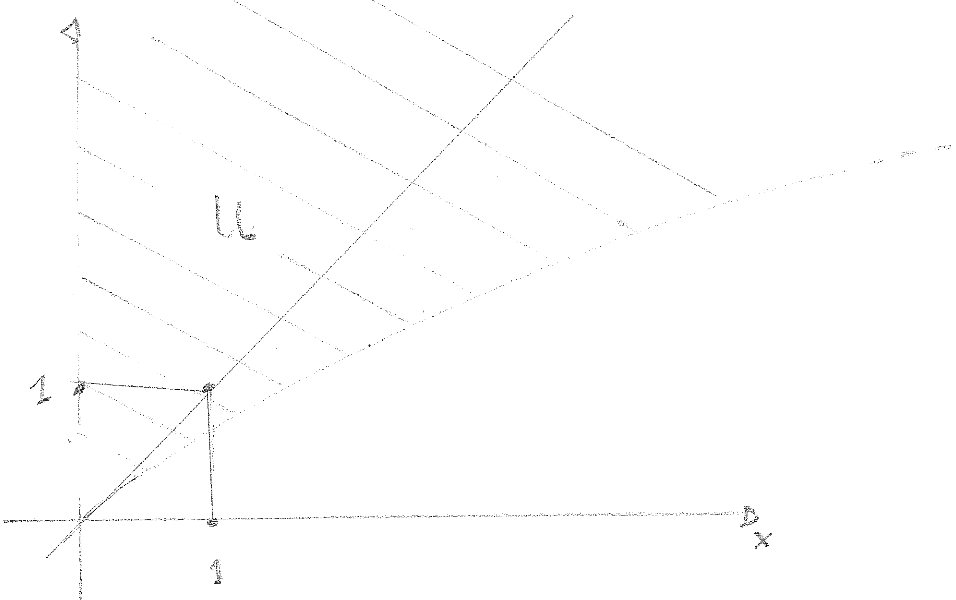
ovvero

$$\frac{y - \sqrt{y^2 + 4y^2}}{2} \underset{\substack{?\\ \text{superflua}}}{<} x < \frac{y + \sqrt{y^2 + 4y^3}}{2}$$

Nella regione

$$\mathcal{U} = \{ (x,y) \in \Omega : \quad x < \frac{1}{2} \left(y + \sqrt{y^2 + 4y^3} \right) \}$$

la soluzione y è convessa:



Vediamo se y esce dalla regione $\mathcal{U}$. Esiste, finito o $+\infty$,

$$L = \lim_{x \to \infty} y(x)$$

e di conseguenza

$$\lim_{x \to \infty} y'(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{y(x)} - \frac{1}{x} = \frac{1}{L}$$

Deduciamo che deve essere $L = \infty$. Confrontiamo $y(x)^{3/2}$ con x per $x \to \infty$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y(x)^{3/2}}{x} \overset{H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3}{2}\, y(x)^{1/2}\, y'(x)}{1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3}{2}\, y(x)^{1/2} \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{x} \right) = -\frac{3}{2} \lim_{x\to\infty} \frac{y(x)^{1/2}}{x}$$

$$= -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \lim_{x\to\infty} \frac{y'(x)}{y(x)^{1/2}} = 0 .$$

Quindi $\dfrac{y + \sqrt{y^2+4y^3}}{2} < x$ per $x > M$; Qui, $y = y(x)$.

per $M > 1$ opportunamente grande.

Proviamo che $\lim_{x\to 0^+} y(x) = \infty$. Infatti

$$y(x) = y(1) + \int_1^x y'(t)\, dt$$

$$= 1 + \int_1^x \left(\frac{1}{y(t)} - \frac{1}{t} \right) dt$$

$$= 1 - \int_x^1 \left(\frac{1}{y(t)} - \frac{1}{t} \right) dt$$

$$= 1 - \int_x^1 \frac{1}{y(t)}\, dt + \int_x^1 \frac{1}{t}\, dt .$$

Se fosse $\lim_{x\to 0^+} y(x) = L < \infty$ si avrebbe un assurdo.

Infatti $\frac{1}{t}$ non è integrabile vicino $t = 0$.

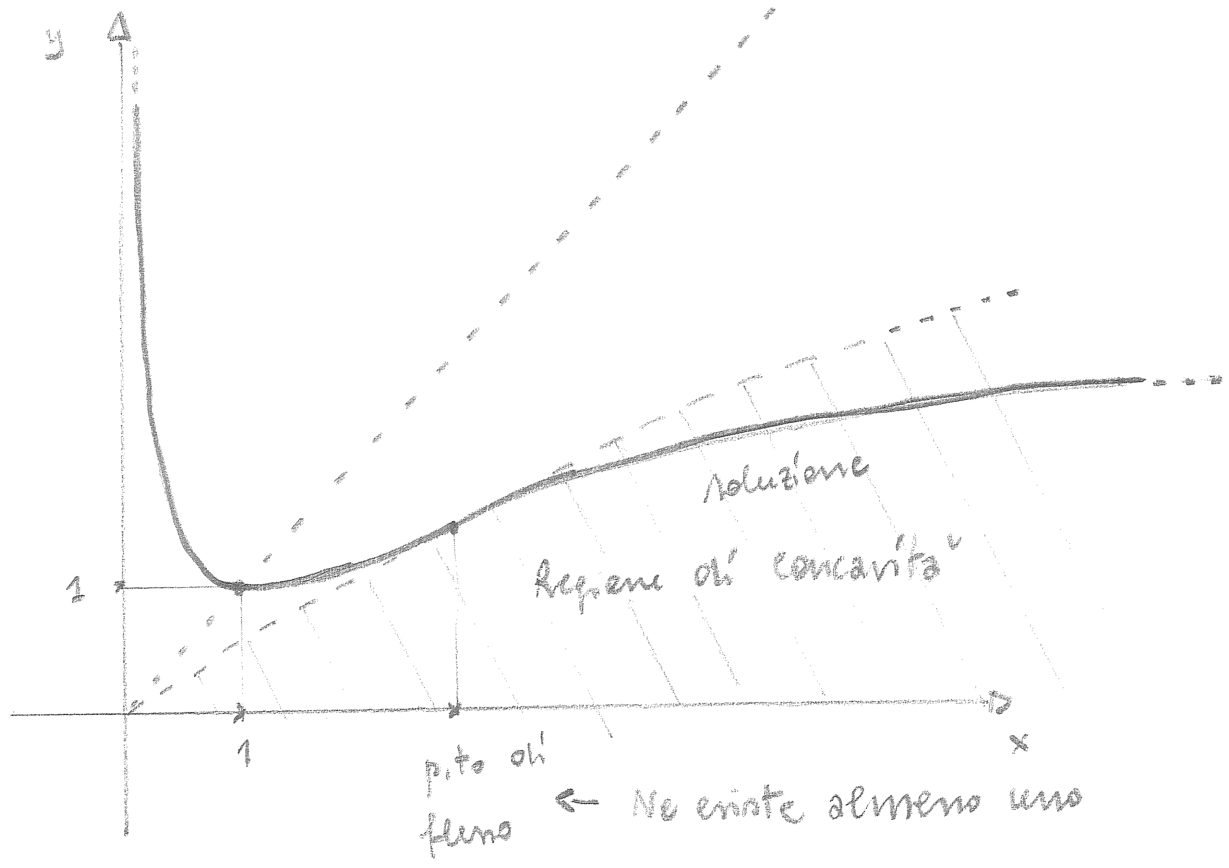


Grafico Approssimativo della soluzione.