

Analisi Matematica 2 – Matematica

Simulazione di prova d'esame

Foglio 10

Esercizio 1 Sia $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, la successione di funzioni

$$f_n(x) = (1 - \sqrt[n]{x^2})^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Calcolare il limite puntuale

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

ii) Discutere la convergenza uniforme delle successione.

Esercizio 2 Sia $\alpha > 0$ un parametro fissato e si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita nel seguente modo

$$f(x, y) = \begin{cases} |y|^\alpha \sin\left(\frac{x}{y}\right), & y \neq 0, \\ 0 & y = 0. \end{cases}$$

Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che:

- i) f sia differenziabile su tutto \mathbb{R}^2 ;
- ii) le derivate parziali di f siano continue nel punto $0 \in \mathbb{R}^2$.
- iii) f sia di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

Esercizio 3 Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{y^2 - x^2 + 1} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

- i) Provare che il problema ha un'unica soluzione locale $y \in C^1(-\delta, \delta)$ per qualche $\delta > 0$;
- ii) Provare che la soluzione è una funzione crescente;
- iii) Sia $(a, b) \subset \mathbb{R}$ l'intervallo di esistenza della soluzione massimale. Provare che $b = \infty$.
- iv) Provare che $y(x) > x$ per ogni $x \in (a, b)$;
- v) Provare che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) - x = 0.$$

Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti.