Analisi Matematica 2 – Matematica

Funzioni implicite. Sottovarietà Foglio 11

Esercizio 1 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y, z) = z\mathrm{e}^{xy} + xy\mathrm{e}^z + xyz$.

i) Provare che l'equazione $f(x, y, z) = 0$ definisce intorno a 0 una funzione di classe C^∞ che esplicita una variabile in funzione delle altre due.

ii) Calcolare il gradiente di φ in $0 \in \mathbb{R}^2$.

iii) Provare che φ ha in $0 \in \mathbb{R}^2$ un punto di sella.

Esercizio 2 Identifichiamo $\mathbb{R}^4$ con $\mathbb{C}^2$ e consideriamo l'insieme

$$M = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : z^2 = w^3\}.$$

Determinare il più piccolo sottoinsieme $\Sigma \subset M$ tale che $M \setminus \Sigma$ sia una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^4 \equiv \mathbb{C}^2$ e determinarne la dimensione.

Esercizio 3 (Toro) Siano $0 < r < R$ due parametri fissati e definiamo

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 - r^2 = 0\}.$$

Provare che M è una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^3$ di classe C^∞ e di dimensione 2. Disegnare M.

Esercizio 4 (Teorema della mappa aperta) Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $f \in C^1(A; \mathbb{R}^m)$ con $1 \leq m \leq n$. Supponiamo che sia rango$(J_f(x)) = m$ per ogni $x \in A$. Provare che f è aperta.