Analisi Matematica 2 – Matematica

Contrazioni e punti fissi Foglio 2

Esercizio 1 Sia $X = C([0,1])$ con la sup-norma. Provare che per $\alpha > 0$ l'applicazione $T : X \to X$

$$T(f)(x) = \mathrm{e}^{-\alpha x} \int_0^x \mathrm{e}^{\alpha t} f(t)\, dt$$

è una contrazione.

Esercizio 2 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione con costante di Lipschitz $L = \mathrm{Lip}(f) < 1$. Provare che la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$F(x,y) = \big(x + f(y), y + f(x)\big), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

è iniettiva e suriettiva. È vero che $F^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è Lipschitziana?

Esercizio 3 Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione

$$\sin x + \int_0^x \sqrt{1 + f'(t)^2}dt = \alpha f(x), \quad x \in [0,1].$$

i) Provare che per $|\alpha| > 1$ l'equazione ha un'unica soluzione $f \in C^1([0,1])$.

ii) Provare che per $|\alpha| \leq 1$ l'equazione non ha soluzione.

Esercizio 4 Sia $X = C([0,1])$ munito della sup-norma e sia $T : X \to \mathbb{R}$ l'applicazione

$$T(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} f\big(1/n\big).$$

i) Provare che $T \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$;

ii) Calcolare $\|T\|$;

iii) Stabilire se esiste una funzione $f \in X$ con $\|f\|_\infty \leq 1$ tale che $T(f) = \|T\|$.

Esercizio 5 Sia X uno spazio metrico compatto e sia $T : X \to X$ un'applicazione tale che $d(T(x), T(y)) < d(x,y)$ per ogni $x, y \in X$ tali che $x \neq y$. Provare che T ha un unico punto fisso su X.