Analisi Matematica 2 – Matematica

Derivate di ordine superiore Foglio 4

Esercizio 1 Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} xy(-\log(x^2+y^2))^{1/2}, & 0 < x^2+y^2 < 1, \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

i) Provare che $f \in C^1(A)$;

ii) Provare che esistono $f_{xx}, f_{yy} \in C(A)$;

iii) Stabilire se $f \in C^2(A)$.

Esercizio 2 Sia $\Delta : C^2(\mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R}^n)$ l'operatore differenziale del secondo ordine (operatore di Laplace)

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Verificare che, per $n \geq 3$, la funzione $u(x) = |x|^{2-n}$, $x \neq 0$, verifica $\Delta u(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. La funzione u si dice *soluzione fondamentale* dell'equazione di Laplace.

Esercizio 3 Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un chiuso non vuoto e definiamo la funzione distanza $d : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$

$$d(x) = \operatorname{dist}(x; K) = \inf_{y \in K} |x - y|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

1) Provare che $\operatorname{Lip}(d) = 1$ (se $K \neq \mathbb{R}^n$).

2) Sia $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ un punto di differenziabilità di d. Provare che x ha proiezione metrica unica su K.

3) Provare che d^2 verifica la disuguaglianza di semiconcavità

$$d(x+h)^2 + d(x-h)^2 - 2d(x)^2 \leq 2|h|^2, \quad x, h \in \mathbb{R}^n.$$

Esercizio 4 Sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, la funzione $u(x) = |x|$. Provare che per $x \neq 0$ si ha $\det D^2u(x) = 0$.

Esercizio 5 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione tale che esistano tutte le derivate parziali

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}, \quad n, m \in \{0, 1, 2, \ldots\}$$

in ogni punto di $\mathbb{R}^2$. È vero che f è allora necessariamente continua? Provare questa affermazione oppure esibire un controesempio.