Analisi Matematica 2 – Matematica

Convessità Foglio 6

Esercizio 1 Provare che se $A \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme convesso, allora anche la chiusura $\bar{A}$ e l'interno $\mathrm{int}(A)$ sono convessi.

Esercizio 2 Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ una funzione tale che $Hf(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Provare che f è strettamente convessa. Mostrare anche che l'implicazione opposta non è vera.

Esercizio 3 Siano $f_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathcal{A}$, funzioni convesse. Supponiamo che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si abbia

$$f(x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha(x) < \infty.$$

Provare che la funzione f è convessa.

Esercizio 4 Sia $f \in C(\mathbb{R}^n)$ una funzione superlineare:

$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{f(x)}{|x|} = \infty.$$

Definiamo la funzione $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (la *trasformata di Legendre* di f)

$$f^*(\xi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \langle \xi, x \rangle - f(x), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

1) Provare che il sup è un max.

2) Verificare che f^* è convessa.

3) Calcolare f^* nel caso $f(x) = \frac{1}{2}|x|^2$.

Esercizio 5 Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ una funzione convessa e consideriamo l'applicazione $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = \nabla f(x)$ con $x \in \mathbb{R}^n$. Provare che F è iniettiva sull'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : Hf(x) > 0\}.$$