Analisi Matematica 2 - A

Nome: Appello scritto del 29 Gennaio 2013

Esercizio 1 (10 punti) Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = |y| + x \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

dove y è la funzione incognita ed x è la sua variabile.

1) Provare che esiste un'unica soluzione $y \in C^1(\mathbb{R})$ del problema e studiarne la monotonia.

2) Calcolare la soluzione.

Esercizio 2 (10 punti) Si consideri la successione di funzioni $f_n = g_n h_n$, $n \in \mathbb{N}$, dove

$$g_n(x) = \operatorname{arctg}(nx) \quad \text{e} \quad h_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1) Calcolare il limite puntuale

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

2) Studiare la convergenza uniforme delle successioni $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) Provare che la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente su $\mathbb{R}$.

Esercizio 3 (10 punti) Siano $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funzioni tali che $f(0) = g(0) = 0$ e, per $x^2 + y^2 \neq 0$,

$$f(x,y) = x \sin\left(\frac{|y|^\alpha}{x^4 + y^2}\right), \quad g(x,y) = \frac{x|y|^\beta}{x^2 + y^4},$$

dove $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ sono parametri.

1) Calcolare tutti gli α tali che f sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

2) Calcolare tutti i β tali che g sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

3) (Facoltativo) Calcolare tutti i $\gamma > 0$ tali che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\left(\frac{|y|^\gamma}{x^2 + y^4}\right) = 0.$$

Tempo a disposizione: 2.30 ore.