Analisi Matematica 2

Roberto Monti

Fisica e Astronomia – Anno Accademico 2015-16

Versione Finale degli Appunti del Corso – 27 Maggio 2016

Indice

CAPITOLO 1

Serie reali e complesse

Dopo aver definito il concetto di serie convergente, reale o complessa, presentiamo i criteri della radice e del rapporto, che sono utili per studiare la convergenza delle serie reali positive. Il criterio di Leibniz si usa invece per stabilire la convergenza di serie reali a segno alterno. Infine, illustriamo i criteri della convergenza assoluta e del confronto asintotico.

1. Serie numeriche. Definizioni

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali o complessi. Vogliamo definire, quando possibile, la somma di tutti gli a_n al variare di $n \in \mathbb{N}$. Tale somma di infiniti termini si indica con il seguente simbolo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n. \tag{1.1}$$

Con tale notazione si vuole indicare un numero reale o complesso. Chiameremo un'espressione come in (1.1) una serie reale (risp. complessa).

Formiamo la *successione delle somme parziali*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + \ldots + a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

La successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ può convergere in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, oppure può non convergere. Nel caso reale la successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ può divergere a ∞ o $-\infty$.

Definizione 1.1 (Serie convergente e divergente). Se la successione delle somme parziali $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad un numero reale o complesso s, poniamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s,$$

e diremo che la serie *converge* ed ha come *somma* s.

Nel caso reale, se la successione delle somme parziali $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞ o $-\infty$, diremo che la serie *diverge* a ∞ o $-\infty$ e scriveremo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \pm\infty.$$

Se la successione delle somme parziali $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non ha limite, nemmeno $\pm\infty$, diremo che la serie *non è definita*.

Definizione 1.2 (Termine generale). Il generico addendo a_n, $n \in \mathbb{N}$, che appare nella serie (1.1) si dice *termine generale* della serie, ed $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è la successione dei termini generali.

Teorema 1.3 (Condizione necessaria di convergenza). Se una serie reale o complessa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

converge allora la successione dei termini generali è infinitesima, ovvero

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Dim. Per ipotesi esiste $s \in \mathbb{R}$ ($s \in \mathbb{C}$) tale che

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

Dunque, si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

□

2. Serie geometrica. Serie telescopiche. Serie armonica generalizzata

2.1. Serie geometrica. Sia $z \in \mathbb{C}$ un numero complesso tale che $z \neq 1$. Ricordiamo la formula per le somme geometriche parziali

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Se $|z| < 1$, allora $\lim\limits_{n\to\infty} z^{n+1} = 0$. Se invece $|z| \geq 1$ il limite non esiste (o non esiste finito). Dunque, si ottiene la formula per la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}, \quad z \in \mathbb{C}, \ |z| < 1.$$

Ad esempio, con $z = 1/2$ si trova la somma della serie geometrica reale di ragione $1/2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = -1 + \frac{1}{1 - 1/2} = 1.$$

2.2. Serie telescopiche. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale o complessa e formiamo la successione delle differenze $b_n = a_{n+1} - a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$\sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} a_k = a_{n+1} - a_0.$$

Se la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad un limite L, allora la serie con termine generale b_n converge e inoltre

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = L - a_0.$$

Ad esempio, si trova

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) = \lim_{n\to\infty} \Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) = 1.\end{aligned}$$

2.3. Somma di tutti gli $1/n^2$. Vogliamo provare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

converge. È noto che la sua somma è $\pi^2/6$, ma non lo proveremo. Dalle disuguaglianze

$$n^2 \geq n(n-1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$$

si ottiene

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < \infty$$

e per confronto la serie in esame converge.

2.4. Somma di tutti gli $1/n$. Vogliamo provare che la seguente serie (detta serie armonica) diverge a ∞:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

In effetti, si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\Big) + \dots \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\Big) + \dots \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty,
\end{aligned}$$

e dunque la serie diverge a ∞. Trasformeremo questa idea di dimostrazione in un criterio generale (Criterio di condensazione di Cauchy).

2.5. Seria armonica generalizzata. Per $\alpha > 0$ si consideri la serie reale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha},$$

chiamata talvolta *serie armonica generalizzata.*

TEOREMA 1.4. La serie armonica generalizzata converge se e solo se $\alpha > 1$.

Dim. I casi $\alpha = 1$ ed $\alpha = 2$ sono stati discussi sopra. Per $\alpha \geq 2$ si ha $n^\alpha \geq n^2$ e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

La serie a sinistra converge.

Quando $0 < \alpha < 1$ si ha $n^\alpha \leq n$ e dunque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

e per confronto la serie a sinistra diverge a ∞.

Rimane da discutere il caso $1 < \alpha < 2$. In questo caso la serie converge. La dimostrazione di questo fatto è rinviata, si vedano la Sezione 7 oppure la Sezione 4 del Capitolo 2. □

3. Criterio della radice e del rapporto per serie reali

Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione reale non negativa, allora la successione delle somme parziali
$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n, \quad n \in \mathbb{N},$$
è monotona crescente e quindi il limite di $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ esiste sempre, finito oppure ∞.

Teorema 1.5 (Criterio del confronto). Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni reali tali che $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente (ovvero per ogni $n \geq \bar{n}$ per qualche $\bar{n} \in \mathbb{N}$). Allora:

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty;$

ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty.$

Dim. Senza perdere di generalità supponiamo che $0 \leq a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Le somme parziali
$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$
$$\sigma_n = b_0 + b_1 + \ldots + b_n$$
verificano $s_n \leq \sigma_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed inoltre convergono perchè sono monotone crescenti. Dunque si ha
$$\lim_{n\to\infty} s_n \leq \lim_{n\to\infty} \sigma_n,$$
da cui si ottengono le conclusioni i) e ii). □

Teorema 1.6 (Criterio della radice). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale non negativa, $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e sia
$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$
Allora si hanno i seguenti due casi:

i) Se $L < 1$ allora la serie converge $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$.

ii) Se $L > 1$ allora la serie diverge $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$. Di più, il termine generale non è infinitesimo.

Se $L = 1$ la serie può sia convergere che divergere.

Dim. i) Sia $\varepsilon > 0$ tale che $q = L + \varepsilon < 1$. Per la caratterizzazione del limite superiore, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Dunque $a_n \leq q^n$ per ogni $n \geq \bar{n}$, e quindi
$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} q^n < \infty.$$
Per confronto, questo prova la convergenza della serie data.

ii) Sia $\varepsilon > 0$ tale che $q = L - \varepsilon > 1$. Per la caratterizzazione del limite superiore, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un indice $k_n \in \mathbb{N}$ tale che $k_n \geq n$ e $\sqrt[k_n]{a_{k_n}} > q$. Inoltre, è possibile scegliere la successione $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in modo tale che $k_n < k_{n+1}$. La (sotto)successione $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ verifica

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = \infty.$$

Quindi la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è infinitesima, e per la condizione necessaria di convergenza la serie non converge, e dunque diverge (essendo a termini non negativi). □

Teorema 1.7 (Criterio del rapporto). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale positiva, $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e supponiamo che esista $L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$. Allora si hanno i seguenti due casi:

i) Se $L < 1$ allora la serie converge $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$.

ii) Se $L > 1$ allora la serie diverge $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$. Di più, il termine generale verifica

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Se $L = 1$ la serie può sia convergere che divergere.

Dim. i) Esiste $\varepsilon > 0$ tale che $q = L + \varepsilon < 1$. Dalla definizione di limite segue che esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_n/a_{n-1} \le q$ per ogni $n \ge \bar{n}$. Dunque si ha

$$a_n \le q a_{n-1} \le \ldots \le q^{n-\bar{n}} a_{\bar{n}}$$

per ogni $n \ge \bar{n}$, e pertanto

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} a_n \le a_{\bar{n}} q^{-\bar{n}} \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} q^n < \infty.$$

Per confronto, questo prova la convergenza della serie.

ii) Esiste $\varepsilon > 0$ tale che $q = L - \varepsilon > 1$, ed esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \ge \bar{n}$ si abbia

$$a_n \ge q a_{n-1} \ge \ldots \ge q^{n-\bar{n}} a_{\bar{n}}.$$

Questo prova che $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ e dunque non è verificata la condizione necessaria di convergenza e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. □

4. Convergenza assoluta di serie reali e complesse

In questa sezione illustriamo il Criterio della convergenza assoluta, che fornisce una condizione sufficiente (ma non necessaria) per la convergenza di serie complesse e di serie reali non necessariamente positive.

Definizione 1.8. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale o complessa. Diciamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge *assolutamente* se converge la serie reale

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Teorema 1.9. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale o complessa. Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente allora converge anche semplicemente ed inoltre

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{1.2}$$

Dim. Iniziamo a considerare il caso in cui $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia una successione reale e definiamo per ogni $n \in \mathbb{N}$ la parte positiva e la parte negativa della successione nel seguente modo

$$a_n^+ = \max\{a_n, 0\}, \quad a_n^- = \min\{a_n, 0\}.$$

Le successioni $(a_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(a_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ verificano le seguenti proprietà: i) $a_n^+ \ge 0$ e $a_n^- \le 0$; ii) $a_n = a_n^+ + a_n^-$; iii) $|a_n| = a_n^+ - a_n^-$; iv) $a_n^+, -a_n^- \le |a_n|$. Dal teorema del confronto abbiamo

$$0 \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty, \quad 0 \le -\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Dalle identità

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k^+ + a_k^-) = \sum_{k=1}^{n} a_k^+ + \sum_{k=1}^{n} a_k^-$$

segue allora anche l'esistenza finita del limite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-.$$

Infine, passando al limte per $n \to \infty$ nella disuguaglianza

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k\Big| \le \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

segue la tesi (1.2). Questo termina la prova nel caso reale.

Sia ora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione complessa e definiamo $\alpha_n = \mathrm{Re}(a_n)$ e $\beta_n = \mathrm{Im}(a_n)$. Dalle disuguaglianze $|\alpha_n| \le |a_n|$ e $|\beta_n| \le |a_n|$ deduciamo che le serie reali

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$$

convergono assolutamente e quindi semplicemente. Converge allora anche la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n.$$

La prova di (1.2) è identica al caso reale. □

5. Serie a segno alterno. Criterio di Leibniz

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali non negativi, $a_n \ge 0$. Una serie numerica della forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

si dice *serie a segno alterno*. Il fattore $(-1)^n$ si chiama fattore alternante. Per studiare la convergenza delle serie a segno alterno si usa il criterio di Leibniz. Premettiamo la seguente osservazione.

LEMMA 1.10. Sia $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale tale che esistano e siano uguali i limiti delle sottosuccessioni degli indici pari e dispari:

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = L \in \mathbb{R}.$$

Allora esiste anche il limite dell'intera successione

$$\lim_{n\to\infty} s_n = L.$$

La dimostrazione è elementare e viene omessa.

TEOREMA 1.11 (Criterio di Leibniz). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali non negativa, $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che:

i) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (successione infinitesma);
ii) $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (successione decrescente).

Allora la serie a segno alterno

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$$

converge.

Dim. Vogliamo provare che la successione delle somme parziali

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k$$

converge ad un valore finito. A questo scopo, consideriamo le somme parziali di indice pari e di indice dispari:

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k a_k, \quad s_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^k a_k.$$

Dal fatto che $a_n \geq 0$ si deduce che

$$s_{2n+1} = -a_{2n+1} + s_{2n} \leq s_{2n}.$$

Dall'ipotesi ii) si deduce che

$$s_{2n+1} = -a_{2n+1} + a_{2n} + s_{2n-1} \geq s_{2n-1}.$$

E sempre dall'ipotesi ii) si trova

$$s_{2n+2} = a_{2n+2} - a_{2n+1} + s_{2n} \leq s_{2n}.$$

Mettendo insieme queste informazioni otteniamo le seguenti conclusioni, valide per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$s_1 \leq s_3 \leq \ldots \leq s_{2n+1} \leq s_{2n} \leq \ldots \leq s_4 \leq s_2.$$

Dunque, la successione $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente e superiormente limitata. La successione $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente e inferiormente limitata. Pertanto le due successioni convergono a limiti finiti:

$$L_1 = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}, \quad L_2 = \lim_{n\to\infty} s_{2n},$$

dove $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ sono numeri reali. D'altra parte, per l'ipotesi i) si ha

$$L_1 - L_2 = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty}(s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} -a_{2n+1} = 0.$$

Quindi $L_1 = L_2$. La tesi segue dal Lemma 1.10. □

Esempio 1.12. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

converge per il Criterio di Leibniz, in quanto la successione $a_n = 1/n$ è infinitesima e decrescente. Sappiamo che questa serie non converge assolutamente.

6. Criterio del confronto asintotico

Per stabilire la convergenza assoluta è a disposizione il criterio del confronto asintotico, che si può usare in combinazione agli sviluppi infinitesimali delle funzioni elementari.

Teorema 1.13. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali o complesse tali che $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e supponiamo che esista finito e non zero il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = L \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente se e solo se converge assolutamente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dim. Dalla disuguaglianza $\Big||z| - |w|\Big| \leq |z - w|$ per numeri complessi $z, w \in \mathbb{C}$ segue che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|b_n|}{|a_n|} = |L| \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Dunque, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$

$$\frac{|L|}{2}|a_n| \leq |b_n| \leq 2|L||a_n|.$$

Per il Teorema del confronto, la tesi segue allora dalle disuguaglianze

$$\frac{|L|}{2} \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} |b_n| \leq 2|L| \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} |a_n|.$$

□

Osservazione 1.14. Il teorema precedente non vale se alle parole "convergenza assoluta" si sostituiscono le parole "convergenza semplice". Si considerino, infatti, le successioni reali $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con

$$b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \qquad a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Chiaramente si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1 \neq 0.$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge semplicemente, per il Criterio di Leibniz. Tuttavia la serie con termine generale a_n non converge semplicemente, infatti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = -\infty.$$

7. Criterio di condesazione di Cauchy per serie reali

Il criterio di condensazione di Cauchy è spesso utile nei casi in cui i criteri della radice e del rapporto sono inefficaci perchè si trova il limite $L = 1$.

Teorema 1.15 (Criterio di Cauchy). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione non negativa, monotona decrescente. Allora si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} < \infty.$$

Dim. Per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, sia $i \in \mathbb{N}$ un indice tale che $2^{n-1} \leq i \leq 2^n - 1$. Siccome la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona decrescente, per tali i si ha $a_i \leq a_{2^{n-1}}$, e sommando si ottiene

$$\sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} a_i \leq a_{2^{n-1}}(2^n - 2^{n-1}) = 2^{n-1} a_{2^{n-1}}.$$

Sommando ora su n si trova

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} a_i \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} a_{2^{n-1}}.$$

Se converge la serie a destra, allora per confronto converge anche la serie a sinistra.

Proviamo l'implicazione opposta. Se l'indice $i \in \mathbb{N}$ verifica $2^{n-1} + 1 \leq i \leq 2^n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$, allora $a_i \geq a_{2^n}$. Sommando su tali i e poi su $n \in \mathbb{N}$, si trova

$$\sum_{i=2}^{\infty} a_i = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} a_i \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}.$$

Per confronto, se converge la serie a sinistra, converge anche la serie a destra. □

Esempio 1.16 (Serie armonica generalizzata). Sia $\alpha > 0$ un parametro reale fissato, e studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Abbiamo già discusso il caso $\alpha = 1, 2$. La successione $a_n = 1/n^\alpha$, $n \geq 1$, è monotona decrescente. Esaminiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\Big)^n.$$

Se $\alpha > 1$ si ha una serie geometrica convergente. Se $0 < \alpha \leq 1$ la serie diverge. Dunque, la serie in esame converge se e solo se $\alpha > 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1.$$

Esempio 1.17 (Serie logaritmiche). Sia $\alpha > 0$ un parametro reale fissato, e studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^{\alpha} n}.$$

La successione $a_n = 1/(n \log^{\alpha} n)$, $n \geq 2$, è monotona decrescente. Esaminiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \log^{\alpha} 2}.$$

Per quanto visto sulla serie armonica generalizzata, la serie in esame converge se e solo se $\alpha > 1$.

8. Riordinamenti di serie

Il valore (la somma) di una serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

dipende dall'ordine in cui si sommano gli infiniti addendi. In altri termini, per le somme infinite non vale la proprietà commutativa. Se tuttavia la serie converge assolutamente allora il valore della somma è indipendente dall'ordine della somma.

Definizione 1.18 (Riordinamento). Una applicazione $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ iniettiva e suriettiva si dice *riordinamento*.

Teorema 1.19. Sia $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie reale o complessa assolutamente convergente. Allora per ogni riordinamento $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ si ha

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)},$$

e la serie converge assolutamente.

Dim. Fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\Big| s - \sum_{k=1}^{\bar{n}} a_k \Big| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \sum_{k=\bar{n}+1}^{\infty} |a_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ora definiamo il numero naturale $\bar{m} = \max\{\sigma^{-1}(1), \ldots, \sigma^{-1}(\bar{n})\}$. Allora se $m \geq \bar{m}$ si ha $m \geq \sigma^{-1}(i)$ per ogni $i = 1, ..., \bar{n}$, ovvero $\sigma^{-1}(i) \in \{1, ..., m\}$ per ogni $i = 1, ..., \bar{n}$, ovvero

$$\{1, \ldots, \bar{n}\} \subset \{\sigma(1), \ldots, \sigma(m)\}.$$

Dunque, se $m \geq \bar{m}$ troviamo

$$\Big| s - \sum_{k=1}^{m} a_{\sigma(k)} \Big| = \Big| s - \sum_{k=1}^{\bar{n}} a_k - \sum_{\substack{k=1 \\ \sigma(k) \notin \{1,\ldots,\bar{n}\}}}^{m} a_{\sigma(k)} \Big| \leq \Big| s - \sum_{k=1}^{\bar{n}} a_k \Big| + \sum_{k=\bar{n}+1}^{\infty} |a_k| \leq \varepsilon.$$

Questo prova che $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = s$.

Lo stesso argomento applicato alla serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ prova l'assoluta convergenza della serie riordinata:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{\sigma(k)}| < \infty.$$

□

Consideriamo ora una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e supponiamo che la seguente serie converga semplicemente ma non assolutamente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty.$$

Allora valgono i seguenti fatti:

i) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Questa è la condizione necessaria di convergenza.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \infty$, dove $a_n^+ = \max\{a_n, 0\}$.

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = -\infty$, dove $a_n^- = \min\{a_n, 0\}$.

Che una delle due affermazioni ii) e iii) debba valere segue dal fatto che in caso contrario ci sarebbe convergenza assoluta. Se valesse solo una delle affermazioni ii) e iii), allora non potrebbe esserci convergenza semplice.

Teorema 1.20. Sia $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, il termine generale di una serie che converge semplicemente ma non assolutamente. Allora per ogni $L \in \mathbb{R}$ esiste un riordinamento $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = L.$$

Dim. Definiamo il riordinamento σ in modo induttivo. Definiamo $\sigma(1) = 1$ e supponiamo che $\sigma(1), ..., \sigma(n)$ siano stati definiti. Definiamo il numero naturale $\sigma(n+1)$ con il seguente criterio. Sia

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)}$$

e distinguiamo i due casi $L_n \geq L$ e $L_n < L$.

Se $L_n \geq L$ definiamo

$$\sigma(n+1) = \min\big\{m \in \mathbb{N} : m \notin \{\sigma(1), ..., \sigma(n)\} \text{ e } a_m < 0\big\}.$$

Osserviamo che l'insieme dei naturali $m \in \mathbb{N}$ con le proprietà richieste è infinito per la condizione iii) vista sopra. Il minimo esiste per il buon ordinamento dei naturali.

Se $L_n < L$ definiamo

$$\sigma(n+1) = \min\big\{m \in \mathbb{N} : m \notin \{\sigma(1), ..., \sigma(n)\} \text{ e } a_m \geq 0\big\}.$$

Il minimo m con le proprietà richieste esiste per la condizione ii).

L'applicazione $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ così definita è iniettiva. Dalle condizioni ii) e iii) segue anche che σ è suriettiva.

Proviamo che $\lim_{n\to\infty} L_n = L$. Fissato $\varepsilon > 0$, per la i) esiste $\bar{m} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{m}$. Inoltre per la ii) si può anche supporre che $L_{\bar{m}} > L - \varepsilon$. Segue che

$L_n > L - \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{m}$. Per la iii) esiste $\bar{n} \geq \bar{m}$ tale che $L_{\bar{n}} \leq L$, e dunque $L_n \leq L + \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Questo termina la dimostrazione. □

9. Esercizi con soluzione

Esercizio 1.1. Dire se converge la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}.$$

Soluzione. La serie non converge in quanto non è verificata la condizione necessaria di convergenza

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0.$$

□

Esercizio 1.2. Calcolare la somma delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n-1}}.$$

Soluzione. Usiamo la formula per la serie geometrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{2}\Big)^n = -1 + \frac{1}{1-1/2} = 1.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n-1}} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{9}\Big)^n = 3\Big(-1 + \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{9}\Big)^n\Big) = 3\Big(-1 + \frac{1}{1-1/9}\Big) = \frac{3}{8}.$$

□

Esercizio 1.3. Stabilire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{\sqrt{1+n^3}}.$$

Soluzione. La serie è a termine positivi:

$$\frac{1+\cos n}{\sqrt{1+n^3}} \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Usiamo il Teorema del Confronto

$$\frac{1+\cos n}{\sqrt{1+n^3}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+n^3}} \leq \frac{2}{n^{3/2}}.$$

Essendo $3/2 > 1$, la serie seguente converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{3/2}} < \infty,$$

e per il Teorema del confronto anche la serie data converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{\sqrt{1+n^3}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{3/2}} < \infty.$$

□

Esercizio 1.4. Scrivere il numero decimale periodico

$$x = 0,454545\ldots = 0,\overline{45}$$

in forma razionale $x = p/q$ con $p, q \in \mathbb{N}$.

Soluzione. Il significato della rappresentazione decimale è

$$\begin{aligned}
0,\overline{45} &= \frac{4}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{10^{2n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{10^{2n}} \\
&= \frac{4}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{100}\Big)^n + 5 \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{10}\Big)^n \\
&= \frac{2}{5} \frac{1}{1 - 1/100} + 5\Big(\frac{1}{1 - 1/100} - 1\Big) \\
&= \frac{45}{99} = \frac{5}{11}.
\end{aligned}$$

□

Esercizio 1.5. Verificare che la serie esponenziale converge

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Soluzione. È una serie a termini positivi:

$$a_n = \frac{1}{n!} > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Usiamo il Criterio del Rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

Dunque, si ha

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1,$$

e dunque la serie converge.

□

Esercizio 1.6. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Soluzione. Il termine generale della serie

$$a_n = \frac{n!}{n^n} > 0$$

è positivo e dunque possiamo utilizzare il Criterio del Rapporto. Avremo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n = \frac{1}{\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n}.$$

Quindi si ha
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1,$$
in quanto $\mathrm{e} > 1$. Per il Criterio del Rapporto la serie converge.

$\square$

Esercizio 1.7. Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che converga la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2+n)}{n} |x|^n.$$

Soluzione. Si tratta di una serie a termini positivi:
$$a_n = \frac{\log(2+n)}{n} |x|^n \geq 0.$$
Possiamo usare il Criterio della Radice. Avremo:
$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{\log(2+n)}{n}} |x|.$$

Partiamo dalle seguenti disuguaglianze:
$$\frac{\sqrt[n]{\log 2}}{\sqrt[n]{n}} \leq \sqrt[n]{\frac{\log(2+n)}{n}} \leq \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} = \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} \leq \sqrt[n]{2}.$$
Dai limiti noti
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log 2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$
segue dal Teorema del Confronto che
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\log(2+n)}{n}} = 1.$$
Di conseguenza:
$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = |x|.$$
Abbiamo due casi:

1) $L = |x| < 1$. La serie converge.
2) $L = |x| > 1$. La serie diverge a ∞.

Rimane da discutere il caso $L = |x| = 1$, ovvero $x = \pm 1$. In questo caso la serie diventa:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n+2)}{n}.$$
Questa serie diverge, per confronto con la serie armonica:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n+2)}{n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log 2}{n} = \infty.$$

Esercizio 1.8. Al variare di $\alpha > 0$ studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\sin(1/n^{\alpha})}{n+1}.$$

Soluzione. Si tratta di una serie a termini positivi. Usando il limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

si deduce che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{n}\sin(1/n^\alpha)}{n+1}}{\dfrac{1}{n^{\alpha+1/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \frac{\sin(1/n^\alpha)}{1/n^\alpha} = 1 \neq 0.$$

Quindi, la serie data converge se e solo se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1/2}},$$

ovvero se e solo se $\alpha > 1/2$.

□

ESERCIZIO 1.9. Determinare tutti i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che converga la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}}{n^\alpha}.$$

Soluzione. Riscriviamo il termine generale nel seguente modo:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\big(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}\big)\big(\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3-1}\big)}{n^\alpha\big(\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3-1}\big)} \\ &= \frac{(n^3+1) - (n^3-1)}{n^\alpha n^{3/2}\Big(\sqrt{1+\frac{1}{n^3}} + \sqrt{1-\frac{1}{n^3}}\Big)} \\ &= \frac{2}{n^{\alpha+3/2}\Big(\sqrt{1+\frac{1}{n^3}} + \sqrt{1-\frac{1}{n^3}}\Big)}. \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$1 \leq \sqrt{1+\frac{1}{n^3}} + \sqrt{1-\frac{1}{n^3}} \leq \sqrt{2}+1, \quad n \in \mathbb{N},$$

e dunque

$$\frac{2}{\sqrt{2}+1}\frac{1}{n^{\alpha+3/2}} \leq a_n \leq \frac{2}{n^{\alpha+3/2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Siccome

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+3/2}} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha + \frac{3}{2} > 1,$$

dal Teorema del Confronto segue che la serie data converge se e solo se $\alpha > -1/2$.

□

ESERCIZIO 1.10. Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{1+n+x^2n^2}.$$

Soluzione. Distinguiamo i due casi: 1) $x = 0$; 2) $x \neq 0$.

Se $x = 0$ la serie diventa
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$
Siccome $\sqrt{n+1} \leq \sqrt{2n} \leq \sqrt{2}\sqrt{n}$ per $n \geq 1$, avremo per il Teorema del Confronto
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} = \infty.$$
L'ultima serie diverge essendo $1/2 < 1$.

Quando $x \neq 0$ si può maggiorare il termine generale nel seguente modo:
$$\frac{\sqrt{n+1}}{1+n+x^2n^2} \leq \frac{\sqrt{n+1}}{x^2n^2} \leq \frac{\sqrt{2n}}{x^2n^2} = \frac{\sqrt{2}}{x^2}\frac{1}{n^{3/2}}.$$
Siccome
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty,$$
essendo $3/2 > 1$, allora dal Teorema del confronto la serie data converge.

□

Esercizio 1.11. Al variare di $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$, con $k \neq 0$, studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{|n-x|}{k}}.$$

Soluzione. La serie è a termini positivi e possiamo dunque usare il Criterio della Radice. Sia
$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathrm{e}^{-\frac{|n-x|}{k}}} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-\frac{|n-x|}{nk}}.$$
Osserviamo che
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|n-x|}{nk} = \lim_{n\to\infty} \frac{|1-x/n|}{k} = \frac{1}{k},$$
e quindi
$$L = \mathrm{e}^{-1/k}.$$

Ci sono due casi:

1) $L < 1$. In questo caso la serie converge. Precisamente:
$$L < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{-1/k} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{k} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad k > 0.$$

2) $L > 1$. In questo caso la serie diverge. Precisamente:
$$L > 1 \quad \Leftrightarrow \quad k < 0.$$

Il caso $L = 1$ non si presenta. Dunque la serie converge se e solo se $k > 0$ (indipendentemente da $x \in \mathbb{R}$).

□

Esercizio 1.12. Discutere la convergenza della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[3]{\sin\Big(\frac{1}{n+1}\Big)}(-1)^n.$$

Soluzione. Abbiamo
$$a_n = \sqrt[3]{\sin\Big(\frac{1}{n+1}\Big)} \geq 0,$$
e quindi siamo in presenza di una serie a segno alterno. Verifichiamo le ipotesi del Criterio di Leibniz:

1) La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima. Infatti:
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\sin\Big(\frac{1}{n+1}\Big)} = \sqrt[3]{\lim_{n\to\infty} \sin\Big(\frac{1}{n+1}\Big)} = \sqrt[3]{\sin\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\Big)} = 0.$$
Abbiamo usato il fatto che la radice cubica e il seno sono funzioni continue.

2) La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente. Dobbiamo controllare che
$$a_{n+1} \leq a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Osserviamo che la funzione $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ è crescente. Inoltre, sull'intervallo $[0, \pi/2]$ la funzione $x \mapsto \sin x$, $x \in [0, \pi/2]$, è crescente. Di conseguenza, la funzione composta
$$f(x) = \sqrt[3]{\sin x}, \quad x \in [0, \pi/2],$$
è (strettamente) crescente. Deduciamo che
$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{\sin\Big(\frac{1}{n+1}\Big)} < \sqrt[3]{\sin\Big(\frac{1}{n}\Big)},$$
e quindi $a_{n+1} < a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Per il Criterio di Leibniz la serie data converge.

□

Esercizio 1.13. Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{5^n \log(n+1)} (x^2 - 2x)^n.$$

Soluzione. La serie non è a termini positivi. Iniziamo a studiare la convergenza assoluta. Detto
$$a_n(x) = \frac{(-4)^n}{5^n \log(n+1)} (x^2 - 2x)^n,$$
studiamo la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)|$$
con il Criterio della Radice. Dobbiamo calcolare il seguente limite:
$$L(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{5\sqrt{\log(n+1)}} |x^2 - 2x|.$$
Per confronto
$$\sqrt[n]{\log 2} \leq \sqrt[n]{\log(n+1)} \leq \sqrt[n]{n},$$
e siccome
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log 2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

dal Teorema del Confronto deduciamo che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log(n+1)} = 1,$$

e dunque

$$L(x) = \frac{4}{5}|x^2 - 2x|.$$

Dal Criterio della Radice si ottengono le seguenti conclusioni:

1) $L(x) < 1$ implica che la serie converge assolutamente.
2) $L(x) > 1$ implica che la serie non converge assolutamente. Di più, si ha $\lim_{n\to\infty} |a_n(x)| = \infty$ e quindi il termine generale non è infinitesimo. Dunque, nel caso $L(x) > 1$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n(x) \neq 0,$$

e quindi non c'è nemmeno convergenza semplice della serie.

Risolviamo la disequazione

$$L(x) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{5}|x^2 - 2x| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x^2 - 2x| < \frac{5}{4}.$$

La disequazione con valore assoluto è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x^2 - 2x < \frac{5}{4} \\ x^2 - 2x > -\frac{5}{4} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 2x - \frac{5}{4} < 0 \\ x^2 - 2x + \frac{5}{4} > 0. \end{cases}$$

Le radici del polinomio $x^2 - 2x - 5/4 = 0$ sono

$$x_\pm = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 5/4}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{5}{4}} = 1 \pm \frac{3}{2}.$$

Dunque si ha

$$x^2 - 2x - \frac{5}{4} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}.$$

L'equazione $x^2 - 2x + \frac{5}{4} = 0$ non ha radici reali. Dunque $x^2 - 2x + \frac{5}{4} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. La conclusione è che:

$$L(x) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x^2 - 2x| < \frac{5}{4} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}.$$

Per tali valori della x la serie converge assolutamente e quindi semplicemente. Analogamente, si ha

$$L(x) > 1 \quad \Leftrightarrow \quad x < -\frac{1}{2} \quad \text{oppure} \quad x > \frac{5}{2}.$$

Per tali valori della x la serie non converge (nè assolutamente nè semplicemente) in quanto il termine generale non è infinitesimo.

Rimane da discutere il caso:

$$L(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x^2 - 2x| = \frac{5}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2} \quad \text{oppure} \quad x = \frac{5}{2}.$$

In entrambi i casi si ha $x^2 - 2x = \frac{5}{4}$, e quindi la serie iniziale diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+1)}. \tag{1.3}$$

Questa serie converge (semplicemente) per il Criterio di Leibniz. Infatti, la successione
$$a_n = \frac{1}{\log(n+1)}, \quad n \in \mathbb{N},$$
verifica:

1) È infinitesima:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n+1)} = 0.$$

2) È decrescente:
$$\begin{aligned} a_{n+1} \le a_n \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\log(n+2)} \le \frac{1}{\log(n+1)} \\ &\Leftrightarrow \quad \log(n+1) \le \log(n+2) \\ &\Leftrightarrow \quad n+1 \le n+2 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 \le 2. \end{aligned}$$

Proviamo che la serie (1.3) non converge assolutamente, ovvero:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)} = \infty.$$
Lo proviamo per confronto partendo dalla disuguaglianza
$$\log(n+1) \le n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\log(n+1)} \ge \frac{1}{n},$$
e dunque
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)} \ge \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$
□

Esercizio 1.14. Studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(\sin(\sin n)\big)^n.$$

Soluzione. Osserviamo che $-1 \le \sin n \le 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Di conseguenza si ha:
$$|\sin(\sin n)| \le \sin 1 = q < 1.$$
Per confronto con la serie geometrica di ragione $q < 1$:
$$\sum_{n=1}^{\infty} |\sin(\sin n)|^n \le \sum_{n=1}^{\infty} q^n < \infty.$$
La serie data converge assolutamente e quindi anche semplicemente.

□

CAPITOLO 2

Integrali di Riemann generalizzati

Esistono integrali impropri (o generalizzati) di due tipi: 1) Integrali di funzioni su *intervalli non limitati.* 2) Integrali di *funzioni non limitate* su intervallo limitato. Vedremo poi la nozione di convergenza assoluta e studieremo gli integrali di tipo oscillante.

Dato un intervallo chiuso e limitato $[a, b] \subset \mathbb{R}$, scriveremo $f \in \mathscr{R}([a, b])$ per dire che f è una funzione limitata e Riemann-integrabile su $[a, b]$.

1. Integrali impropri su intervallo illimitato

Definizione 2.1. Siano $a \in \mathbb{R}$ ed $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $f \in \mathscr{R}([a, b])$ per ogni $b \geq a$. Diciamo che f è *integrabile in senso improprio su* $[a, \infty)$ se esiste finito il limite

$$I = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx. \tag{2.1}$$

In questo caso, chiamiamo il numero reale

$$\int_a^\infty f(x)dx = I$$

integrale improprio di f *su* $[a, \infty)$, e diciamo che l'integrale improprio *converge.* Se il limite esiste infinito ($\pm\infty$) diremo che l'integrale improprio di f *diverge a* $\pm\infty$. Se il limite non esiste, diremo che l'integrale non è definito.

L'integrale improprio eredita dall'integrale di Riemann le proprietà di linearità, monotonia e di decomposizione del dominio.

Esempio 2.2 (Fondamentale). Studiamo la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro reale $\alpha > 0$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx.$$

Nel caso $\alpha \neq 1$ si ha

$$\int_1^b \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{x=1}^{x=b} = \frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}.$$

Concludiamo che:

1) Se $\alpha > 1$ l'integrale converge

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b\to\infty} \frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$$

2) Se $0 < \alpha < 1$ l'integrale diverge

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b\to\infty} \frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \infty.$$

Nel caso $\alpha = 1$ si ha

$$\int_1^b \frac{1}{x} dx = \log b,$$

e quindi l'integrale diverge

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to\infty} \log b = \infty.$$

2. Integrali impropri di funzioni non limitate

Passiamo alla definizione di integrale di funzioni non limitate su intervallo limitato.

Definizione 2.3. Sia $f : (a, b] \to \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$, una funzione tale che $f \in \mathscr{R}([a + \varepsilon, b])$ per ogni $\varepsilon > 0$. Diciamo che f è *integrabile in senso improprio su* $(a, b]$ se esiste finito il limite

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

In questo caso, diciamo che l'integrale improprio di f su $(a, b]$ *converge* e poniamo

$$\int_a^b f(x) dx = I.$$

Lo studio degli integrali impropri di funzioni come nella definizione precedente si può ricondurre allo studio di integrali impropri su intervallo illimitato tramite il cambiamento di variabile $y = \frac{b-a}{x-a}$ che porta alla trasformazione di integrali

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) \int_1^\infty f\Big(a + \frac{b-a}{y}\Big) \frac{dy}{y^2}.$$

Esempio 2.4 (Fondamentale). Studiamo la convergenza del seguente integrale improprio al variare di $\alpha > 0$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx.$$

Con il cambiamento di variabile $x = 1/y$ si trova

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \int_1^\infty \frac{1}{y^{2-\alpha}} dy,$$

e quindi l'integrale converge se e solo se $\alpha < 1$. Più precisamente, si ha la seguente situazione

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \infty, & \alpha \geq 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha}, & 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

3. Teorema del confronto e del confronto asintotico

Sia $f : [a, \infty) \to [0, \infty)$ una funzione non negativa, $f \geq 0$, tale che $f \in \mathscr{R}([a, b])$ per ogni $b \geq a$. Allora la funzione

$$I(b) = \int_a^b f(x)dx$$

è monotona crescente per $b \geq a$ e dunque ha limite per $b \to \infty$. Quindi l'integrale imporprio di f su $[a, \infty)$ esiste certamente, finito oppure ∞.

Teorema 2.5 (Criterio del confronto). Siano $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, due funzioni tali che $f, g \in \mathscr{R}([a, b])$ per ogni $b \geq a$. Supponiamo che esista $\bar{x} \geq a$ tale che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \geq \bar{x}$. Allora:

a) $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx < \infty \quad \Rightarrow \quad \int_a^\infty f(x)dx < \infty$;

b) $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx = \infty \quad \Rightarrow \quad \int_a^\infty g(x)dx = \infty$.

Dim. Senza perdere di generalità si può supporre $\bar{x} = a$. Per la monotonia dell'integrale di Riemann, si ha per ogni $b \geq a$:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Le affermazioni a) e b) seguono passando al limite per $b \to \infty$. □

Più pratico del teorema del confronto è il teorema del confronto asintotico.

Teorema 2.6 (Criterio del confronto asintotico). Siano $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, due funzioni tali che $f, g \in \mathscr{R}([a, b])$ per ogni $b \geq a$. Supponiamo che risulti $g(x) > 0$ per ogni $x \geq a$ e che esista finito e diverso da zero il limite

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0.$$

Allora:

$$\int_a^\infty f(x)dx \quad \text{converge} \quad \text{se e solo se} \quad \int_a^\infty g(x)dx \quad \text{converge.}$$

Dim. Supponiamo ad esempio che sia $0 < L < \infty$. Allora, per il Teorema della permanenza del segno esiste $\bar{x} \geq a$ tale che per ogni $x \geq \bar{x}$ si ha

$$\frac{L}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 2L.$$

Siccome $g > 0$, si può riordinare la disuguaglianza ottenendo $\frac{L}{2}g(x) \leq f(x) \leq 2Lg(x)$ per ogni $x \geq \bar{x}$. La tesi segue dal Teorema del confronto. □

Osservazione 2.7. Useremo il criterio del confronto asintotico anche per integrali impropri su intervalli limitati $(a, b]$ oppure $[a, b)$ per funzioni che hanno asintoti verticali.

4. Confronto fra serie e integrali

Il seguente criterio è utile per ricondurre lo studio della convergenza di serie a quella di integrali.

Teorema 2.8 (Criterio del confronto integrale). Sia $f : [1,\infty) \to [0,\infty)$ una funzione decrescente e non negativa, e sia $a_n = f(n)$ per $n = 1, 2, \ldots$. Allora si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x)dx < \infty.$$

Dim. Se $x \in (n-1, n]$, con $n \geq 2$, allora si hanno le disuguaglianze

$$a_n = f(n) \leq f(x) \leq f(n-1) = a_{n-1},$$

e dunque, integrando su $(n-1, n]$ e poi sommando su $n \geq 2$ si trova

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=2}^{\infty} \int_{n-1}^{n} f(x)dx = \int_1^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=2}^{\infty} f(n-1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

La tesi segue. □

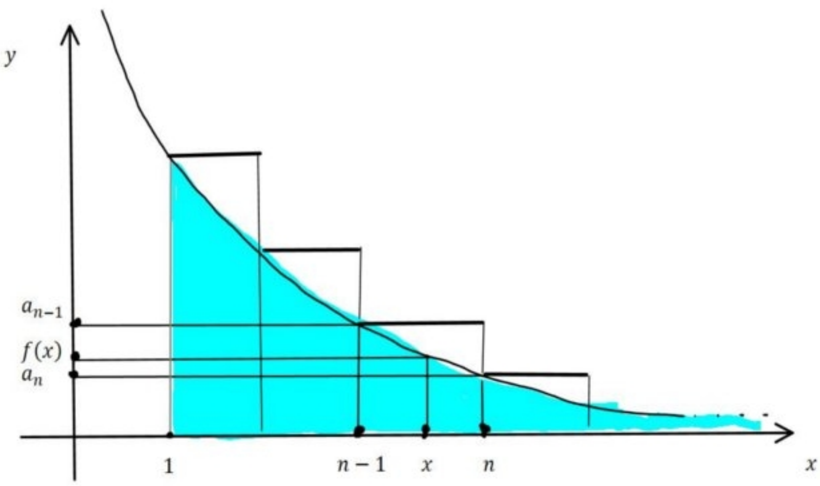

Figura 1

Esempio 2.9. Sia $\alpha > 0$. La serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

converge se e solo se $\alpha > 1$. Infatti, l'integrale

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

converge se e solo se $\alpha > 1$.

Esempio 2.10. Sia $\alpha > 0$. Verificare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$$

converge se e solo se $\alpha > 1$.

5. Convergenza assoluta

Confronto e confronto asintotico di possono applicare quando la funzione integranda è non negativa. Per riportarsi a questo caso si può usare il criterio della convergenza assoluta.

DEFINIZIONE 2.11. Siano $a \in \mathbb{R}$ ed $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $f \in \mathscr{R}([a, b])$ per ogni $b \geq a$. Diciamo che f è *assolutamente integrabile su* $[a, \infty)$ se converge l'integrale improprio

$$\int_a^\infty |f(x)|dx < \infty.$$

In questo caso, diciamo che l'integrale improprio $\int_a^\infty f(x)dx$ *converge assolutamente.*

TEOREMA 2.12. Sia $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $f \in \mathscr{R}([a, b])$ per ogni $b \geq a$. Se f è assolutamente integrabile su $[a, \infty)$ allora è integrabile in senso improprio su $[a, \infty)$ e inoltre

$$\Big| \int_a^\infty f(x)dx \Big| \leq \int_a^\infty |f(x)|dx. \tag{2.2}$$

Dim. Definiamo le funzioni $f^+, f^- : [a, \infty) \to \mathbb{R}$

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad \text{e} \quad f^-(x) = \min\{f(x), 0\}, \quad x \geq a.$$

Chiaramente $f(x) = f^+(x) + f^-(x)$ e $|f(x)| = f^+(x) - f^-(x)$ per ogni $x \geq a$. È noto, inoltre, che le funzioni f^+, f^- sono Riemann–integrabili su ogni intervallo $[a, b]$. Per il Teorema del confronto, gli integrali impropri

$$\int_a^\infty f^+(x)dx \quad \text{e} \quad \int_a^\infty f^-(x)dx$$

convergono. Passando al limite per $b \to \infty$ nell'identità

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \big(f^+(x) + f^-(x)\big)dx = \int_a^b f^+(x)dx + \int_a^b f^-(x)dx$$

si ottiene la convergenza dell'integrale improprio di f su $[a, \infty)$. Passando al limite nella disuguaglianza

$$\begin{aligned} \Big| \int_a^b f(x)dx \Big| &= \Big| \int_a^b f^+(x)dx + \int_a^b f^-(x)dx \Big| \\ &\leq \int_a^b |f^+(x)|dx + \int_a^b |f^-(x)|dx = \int_a^b |f(x)|dx \end{aligned}$$

si ottiene la (2.2). □

ESEMPIO 2.13. L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ non converge assolutamente, ovvero

$$\int_0^\infty \Big| \frac{\sin x}{x} \Big| dx = \infty.$$

Infatti, sul generico intervallo $[k\pi + \pi/4, k\pi + 3\pi/4]$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, risulta

$$|\sin x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{x} \geq \frac{1}{k\pi + 3\pi/4},$$

e dunque per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \frac{\sqrt{2}\pi}{8(k\pi + 3\pi/4)}.$$

Per confronto si deduce che l'integrale diverge

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \frac{\sqrt{2}\pi}{8} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k\pi + 3\pi/4} = \infty.$$

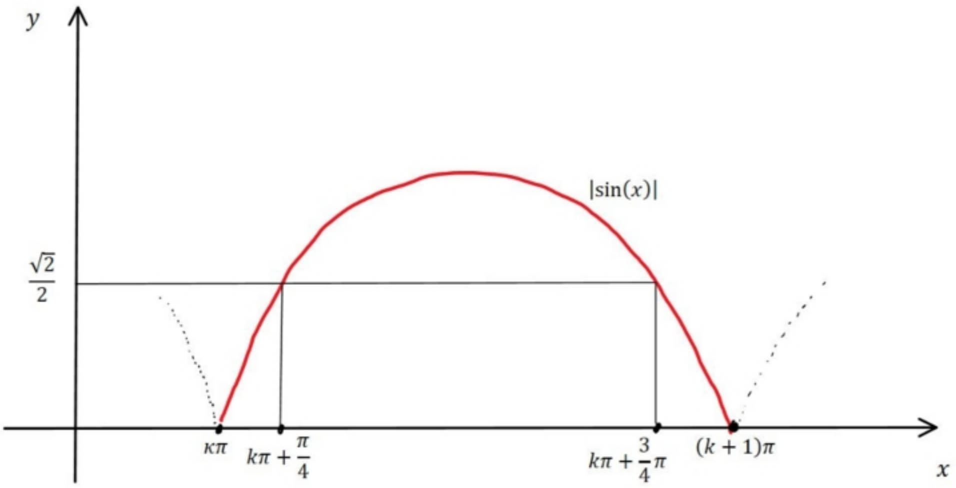

FIGURA 2

6. Integrali oscillanti

Tipici esempi di integrali oscillanti sono

$$\int_0^\infty f(x) \sin x \, dx, \qquad \int_0^\infty f(x) \cos x \, dx,$$

ovvero l'integrale a valori complessi

$$\int_0^\infty f(x) e^{ix} dx = \int_0^\infty f(x) \cos x \, dx + i \int_0^\infty f(x) \sin x \, dx,$$

dove $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione non negativa, $f \geq 0$, con opportune proprietà di integrabilità.

Il seguente teorema fornisce una condizione sufficiente per la convergenza di integrali oscillanti. È l'analogo del Criterio di Leibniz per serie a segno alterno.

TEOREMA 2.14 (Criterio di Abel). Siano $f \in C([a, \infty))$ e $g \in C^1([a, \infty))$, $a \in \mathbb{R}$, due funzioni con le seguenti proprietà:

i) $f = F'$ con primitiva $F \in C^1([a, \infty))$ limitata;
ii) $g' \leq 0$ e $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.

Allora l'integrale improprio

$$\int_a^\infty f(x)g(x)dx$$

converge.

Dim. Per ogni $b > a$ si ottiene, con un'integrazione per parti,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &= \Big[F(x)g(x)\Big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b F(x)g'(x)dx \\ &= F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b F(x)g'(x)dx.\end{aligned}$$

Siccome F è limitata e g è infinitesima per $b \to \infty$, si ha

$$\lim_{b\to\infty} F(b)g(b) = 0.$$

D'altra parte, siccome $g' \le 0$ si trova

$$\begin{aligned}\int_a^b |F(x)g'(x)|dx &\le \sup_{x\in[a,\infty)} |F(x)| \int_a^b |g'(x)|dx = -\sup_{x\in[a,\infty)} |F(x)| \int_a^b g'(x)dx \\ &= \big(g(a) - g(b)\big) \sup_{x\in[a,\infty)} |F(x)|,\end{aligned}$$

e dunque, usando nuovamente il fatto che g è infinitesima

$$\int_a^\infty |F(x)g'(x)|dx \le g(a) \sup_{x\in[a,\infty)} |F(x)| < \infty.$$

Dal momento che la funzione Fg' è assolutamente integrabile su $[a, \infty)$, per il Criterio della convergenza assoluta esiste finito anche il limite

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b F(x)g'(x)dx.$$

Questo termina la prova del teorema. □

Esempio 2.15. Usando il Teorema 2.14 sugli integrali oscillanti, si vede che per ogni scelta del parametro $\alpha > 0$ l'integrale improprio

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$$

converge. Infatti, la funzione $f(x) = \sin x$ ha primitiva limitata $F(x) = -\cos x$ e la funzione $g(x) = 1/x^\alpha$ ha derivata negativa per $x > 0$ ed è infinitesima per $x \to \infty$.

7. Funzione Γ di Eulero

Definiamo la funzione $\Gamma : (0, \infty) \to (0, \infty)$ nel seguente modo

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} dt, \quad x > 0.$$

Γ si chiama funzione Gamma di Eulero. Verifichiamo che l'integrale improprio converge sia in $t = 0$ che per $t \to \infty$. Per $x > 0$ si ha

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{1-x}} dt < \infty$$

per confronto asintotico, dal momento che $1 - x < 1$. Inoltre si ha per ogni $x > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{1-x}\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^{-t/2}} = 0,$$

e quindi esiste un $\bar{t} > 0$ (che dipende da x) tale che $t^{1-x}\mathrm{e}^{-t} \le \mathrm{e}^{-t/2}$ per ogni $t \ge \bar{t}$. Dal Teorema del confronto si deduce che

$$\int_1^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt < \infty.$$

Questo prova che $\Gamma(x) \in \mathbb{R}$ per ogni $x > 0$, la funzione è ben definita ed in effetti $\Gamma(x) > 0$.

Ora, con un'integrazione per parti si trova, per ogni $x > 0$,

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x\mathrm{e}^{-t}dt &= [-t^x\mathrm{e}^{-t}]_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^\infty xt^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt \\ &= x\int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt \\ &= x\Gamma(x).\end{aligned}$$

È facile calcolare $\Gamma(1) = 1$. Quindi, dalla formula precedente si deduce per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\Gamma(n+1) = n!$. La funzione Γ di Eulero traslata di 1 è un'interpolazione su tutti i numeri reali positivi del fattoriale, definito sui soli numeri naturali.

8. Esercizi con soluzione

Esercizio 2.1. Dopo aver calcolato l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \log^2 x\, dx$, studiare la convergenza dell'integrale $\displaystyle\int_0^1 \log\Big(1 + \frac{1}{x^2}\Big)\log x\, dx$.

Soluzione. Con due integrazioni per parti si ottiene:

$$\int \log^2 x\, dx = x\log^2 x - 2\int \log x\, dx = x\log^2 x - 2x\log x + 2x + C.$$

Quindi si trova

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log^2 x\, dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \log^2 x\, dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \Big[x\log^2 x - 2x\log x + 2x\Big]_{x=\varepsilon}^{x=1} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \Big(2 - \varepsilon\log^2\varepsilon + 2\varepsilon\log\varepsilon - 2\varepsilon\Big) = 2.\end{aligned}$$

L'integrale improprio è convergente.

Utilizziamo il Criterio del confronto asintotico. Confrontiamo la funzione

$$f(x) = \log\Big(1 + \frac{1}{x^2}\Big)\log(x)$$

con la funzione $g(x) = \log^2 x$. Il limite del quoziente per $x \to 0$ è

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log\Big(1 + \frac{1}{x^2}\Big)}{\log x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2}{1+x^2} = -2 \neq 0.$$

Dal punto 1) segue che l'integrale improprio di f converge.

$\square$

Esercizio 2.2. Calcolare l'integrale improprio

$$I = \int_4^\infty \frac{1}{x(\sqrt{x}-1)}dx.$$

Soluzione. Calcoliamo innanzitutto per ogni $b > 4$ l'integrale

$$\int_4^b \frac{1}{x(\sqrt{x}-1)}dx.$$

Utilizziamo il teorema di integrazione per sostituzione. Si pone $\sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^2$, $dx = 2ydy$. Gli estremi di integrazione si trasformano in questo modo: $x = 4 \Rightarrow y = 2$, $x = b \Rightarrow y = \sqrt{b}$. Dunque, si trova

$$\int_4^b \frac{1}{x(\sqrt{x}-1)}dx = 2\int_2^{\sqrt{b}} \frac{1}{y(y-1)}dy.$$

Decomponendo in fratti semplici si ha

$$2\int_2^{\sqrt{b}} \frac{1}{y(y-1)}dy = -2\int_2^{\sqrt{b}} \frac{dy}{y} + 2\int_2^{\sqrt{b}} \frac{dy}{y-1} = 2\Big(\log\frac{\sqrt{b}-1}{\sqrt{b}} + \log 2\Big).$$

In conclusione, passando al limite per $b \to \infty$

$$I = \lim_{b\to\infty} 2\Big(\log\frac{\sqrt{b}-1}{\sqrt{b}} + \log 2\Big) = 2\log 2.$$

L'integrale improprio converge e ne abbiamo calcolato il valore esatto.

$\square$

Esercizio 2.3. Al variare del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri l'integrale improprio

$$I_\alpha = \int_1^\infty \frac{x^\alpha}{1+1/x}\log\Big(1+\frac{1}{x}\Big)dx.$$

1) Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che l'integrale improprio sia convergente.
2) Calcolare I_α per $\alpha = -2$.

Soluzione. 1) Per rispondere alla prima domanda osserviamo in primo luogo che

$$\log\Big(1+\frac{1}{x}\Big) = \frac{1}{x} + o\Big(\frac{1}{x}\Big), \quad x \to \infty,$$

dove $o(1/x)$ indica una quantità che converge a zero più velocemente di $1/x$ quando $x \to \infty$. Dunque, la funzione integranda è

$$\frac{x^\alpha}{1+1/x}\log\Big(1+\frac{1}{x}\Big) = \frac{1}{x^{1-\alpha}}(1+o(1)),$$

dove $o(1)$ indica una quantità infinitesima al tendere di $x \to \infty$. Dunque la funzione integranda è infinitesima di ordine $1-\alpha$ rispetto ad $1/x$. Per il Criterio del confronto asintotico, l'integrale converge se solo se

$$1-\alpha > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 0.$$

2) Quando $\alpha = -2$ l'integrale imporprio converge. Per calcolarlo osserviamo che

$$\frac{d}{dx}\log^2\Big(1+\frac{1}{x}\Big) = 2\log\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\cdot\frac{-x^{-2}}{1+1/x},$$

e quindi

$$\int_1^\infty \frac{x^{-2}}{1+1/x}\log\Big(1+\frac{1}{x}\Big)dx = \lim_{b\to\infty}\Big[-\frac{1}{2}\log^2\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\Big]_{x=1}^{x=b} = \frac{1}{2}\log^2 2.$$

La primitiva si può anche determinare tramite una serie di sostituzioni.

□

Esercizio 2.4. Studiare la convergenza del seguente integrale improprio

$$\int_0^\pi \frac{\sqrt{\sin x}\log\big(\frac{\pi+x}{2\pi}\big)}{(\pi-x)^2}dx.$$

Soluzione. Osserviamo che la funzione integranda non è definita per $x=\pi$ mentre è definita e continua in $[0,\pi)$. Per comodità operiamo il cambiamento di variabile $y=\pi-x, dx=-dy$ ottenendo

$$\int_0^\pi \frac{\sqrt{\sin x}\log\big(\frac{\pi+x}{2\pi}\big)}{(\pi-x)^2}dx = \int_0^\pi \frac{\sqrt{\sin y}\log\big(1-\frac{y}{2\pi}\big)}{y^2}dy.$$

Per $y\to 0^+$ si hanno gli sviluppi infinitesimali

$$\sin y = y+o(y) \qquad\qquad \log\left(1-\frac{y}{2\pi}\right) = -\frac{y}{2\pi}+o(y),$$

dove $o(y)$ indica una quantità che tende a 0 più velocemente di y. Dunque, la funzione integranda è

$$\frac{\sqrt{\sin y}\log\big(1-\frac{y}{2\pi}\big)}{y^2} = \frac{y\big(-\frac{1}{2\pi}+o(1)\big)\sqrt{y}(1+o(1))}{y^2} = \frac{-\frac{1}{2\pi}+o(1)}{y^{1/2}}.$$

La funzione integranda ha ordine di infinito $1/2$ rispetto ad $1/y$ per $y\to 0^+$. Siccome $1/2<1$ l'integrale improprio converge per il criterio del confronto asintotico.

□

Esercizio 2.5. Verificare che la funzione $f(x) = (\sin x\log x)/x^2$ ha integrale improprio assolutamente convergente su $[1,\infty)$.

Soluzione. Dobbiamo verificare che

$$\int_1^\infty \left|\frac{\sin x\log x}{x^2}\right|dx<\infty.$$

Cerchiamo di utilizzare il Teorema del confronto ricercando una maggiorazione della funzione integranda. Ora

$$|f(x)| = \left|\frac{\sin x\log x}{x^2}\right| = |\sin x|\left|\frac{\log x}{x^2}\right| \le \left|\frac{\log x}{x^2}\right|$$

dove si è usato il fatto che $|\sin x|\le 1$. Cerchiamo di eliminare il logaritmo con una maggiorazione opportuna. Ricordiamo che

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0,$$

e dunque esiste $b > 0$ tale che per ogni $x \geq b$ vale

$$\frac{\log x}{\sqrt{x}} \leq 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \log x \leq \sqrt{x}.$$

Dunque, per $x \geq b$ avremo

$$|f(x)| \leq \frac{\log x}{x^2} = \frac{1}{x^{3/2}}.$$

Siccome $3/2 > 1$

$$\int_b^\infty \frac{1}{x^{3/2}} dx < \infty$$

e da Teorema del Confronto deduciamo che

$$\int_b^\infty |f(x)| dx \leq \int_b^\infty \frac{1}{x^{3/2}} dx < \infty.$$

$\square$

Esercizio 2.6. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$I_\alpha = \int_0^\infty \frac{x \arctan(x^\alpha)}{\sinh(x^2)} dx.$$

Soluzione. La convergenza dell'integrale va studiata sia in un intorno destro di 0 che a ∞. Ricordiamo che per ogni $p > 0$ si ha

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh(x^2)}{x^p} = \infty.$$

Quindi esiste una costante $C = C_p > 0$ tale che per ogni $x \geq 1$ si ha

$$\frac{1}{\sinh(x^2)} \leq \frac{C}{x^p}.$$

Dunque, per $x \geq 1$ si può maggiorare

$$\Big| \frac{x \arctan(x^\alpha)}{\sinh(x^2)} \Big| \leq \frac{\pi C}{2} \frac{1}{x^{p-1}}.$$

Con la scelta $p = 3$ (o comunque $p > 2$), si trova

$$\int_1^\infty \Big| \frac{x \arctan(x^\alpha)}{\sinh(x^2)} \Big| dx \leq \frac{\pi C}{2} \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx < \infty.$$

Sull'intervallo $[1, \infty)$ c'è convergenza assoluta per ogni valore di α.

Esaminiamo la convergenza dell'integrale sull'intervallo $[0, 1]$.

Primo caso: $\alpha > 0$. In questo caso la funzione $x \mapsto \arctan(x^\alpha)$ è infinitesima e precisamente $\arctan(x^\alpha) = x^\alpha + o(x^\alpha)$ per $x \to 0^+$. Analogamente, $\sinh(x^2) = x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$. In definitiva si ha per $x \to 0$

$$\frac{x \arctan(x^\alpha)}{\sinh(x^2)} = \frac{x(x^\alpha + o(x^\alpha))}{x^2 + o(x^2)} = \frac{1 + o(1)}{x^{1-\alpha}}.$$

Per il Teorema del confronto asintotico, l'integrale

$$\int_0^1 \frac{x \arctan(x^\alpha)}{\sinh(x^2)} dx$$

converge (semplicemente e assolutamente) se e solo se $1-\alpha<1$ ovvero $\alpha>0$, ovvero sempre nel caso in esame.

Secondo caso: $\alpha \le 0$. In questo caso la funzione $x \mapsto \arctan(x^\alpha)$ non è infinitesima per $x \to 0^+$, ma converge a $C=\pi/2$ se $\alpha<0$ ed a $C=\pi/4$ se $\alpha=0$. Quindi si ha per $x \to 0$

$$\frac{x\arctan(x^\alpha)}{\sinh(x^2)} = \frac{C+o(1)}{x}.$$

Dal teorema del confronto asintotico si deduce che per $\alpha \le 0$ l'integrale

$$\int_0^1 \frac{x\arctan(x^\alpha)}{\sinh(x^2)}dx$$

diverge. In conclusione, l'integrale converge se e solo se $\alpha>0$.

□

Esercizio 2.7. Per $\alpha \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza semplice ed assoluta dell'integrale improprio

$$\int_1^\infty x\,\sin(x^\alpha)\,dx.$$

Soluzione. Da scrivere. □

Esercizio 2.8. Determinare tutti gli $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ per i quali converge il seguente integrale generalizzato

$$I_{\alpha,\beta} = \int_0^\infty \frac{|x-1|^\alpha \arctan(x)}{x^\beta(1+x^2)}\,dx.$$

Calcolare esplicitamente l'integrale nel caso $\alpha=\beta=0$.

Soluzione. Occorre controllare la convergenza dell'integrale vicino $x=0$ (se $\beta>0$), vicino $x=1$ (quando $\alpha<0$) e quando $x\to\infty$. Per semplicità poniamo

$$f(x) = \frac{|x-1|^\alpha \arctan(x)}{x^\beta(1+x^2)}.$$

Usiamo il Criterio del confronto asintotico. Una funzione di confronto per $x\to 0^+$ è $g(x)=1/x^{\beta-1}$, che verifica:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = 1 \neq 0.$$

Siccome

$$\int_0^{1/2}\frac{1}{x^{\beta-1}}dx<\infty \quad \Leftrightarrow \quad \beta-1<1,$$

allora

$$\int_0^{1/2} f(x)dx \quad \text{converge se e solo se } \beta<2.$$

Una funzione di confronto per $x\to 1$ è ovviamente $h(x)=|x-1|^\alpha$, che verifica $f(x)/h(x)\to\pi/8\neq 0$ per $x\to 1$. D'altra parte

$$\int_{-1/2}^{3/2} f(x)dx \quad \text{converge se e solo se converge} \quad \int_{-1/2}^{3/2}|x-1|^\alpha dx,$$

e l'ultimo integrale converge se e solo se $\alpha>-1$.

Infine, una funzione di confronto per $x \to \infty$ è $k(x) = 1/x^{2+\beta-\alpha}$, che verifica $f(x)/h(x) \to \pi/2$ per $x \to \infty$. Poichè

$$\int_{3/2}^{\infty} \frac{1}{x^{2+\beta-\alpha}} dx < \infty \quad \Leftrightarrow \quad 2+\beta-\alpha > 1,$$

l'integrale su $(3/2, \infty)$ converge se e solo se $\alpha < \beta + 1$.

La conclusione è che l'integrale generalizzato di f su $(0, \infty)$ converge se e solo se $-1 < \alpha < 1 + \beta$ e $\beta < 2$.

Nel caso $\alpha = \beta = 0$ si ottiene

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^2} \, dx$$

che si calcola mediante la sostituzione $t = \arctan(x)$:

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\arctan(x)}{1+x^2} \, dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\left[\frac{(\arctan(x))^2}{2} \right]_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \right) = \frac{\pi^2}{8}.$$

$\square$

CAPITOLO 3

Curve in $\mathbb{R}^n$

Definiamo la nozione di curva in $\mathbb{R}^n$, di sostegno, di campo tangente e di lunghezza. Proviamo la formula della lunghezza, anche in coordinate polari, introduciamo la parametrizzazione a lunghezza d'arco, e spieghiamo come integrare una funzione lungo una curva.

1. Curve in $\mathbb{R}^n$

Sia $[0, L] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso di lunghezza $L > 0$ e sia $n \geq 2$ una costante di dimensione. Indichiamo i punti $x \in \mathbb{R}^n$ con le coordinate $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Definizione 3.1. Una funzione continua $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^n$ si dice *curva in* $\mathbb{R}^n$. Se $\gamma(0) = \gamma(L)$ la curva si dice *chiusa*. Se $\gamma(t) \neq \gamma(s)$ per $s, t \in [0, L)$ distinti, la curva si dice *semplice*. L'insieme di $\mathbb{R}^n$

$$\mathrm{spt}(\gamma) = \gamma([0, L]) = \big\{\gamma(t) \in \mathbb{R}^n : t \in [0, L]\big\}$$

si dice *sostegno (o supporto)* della curva.

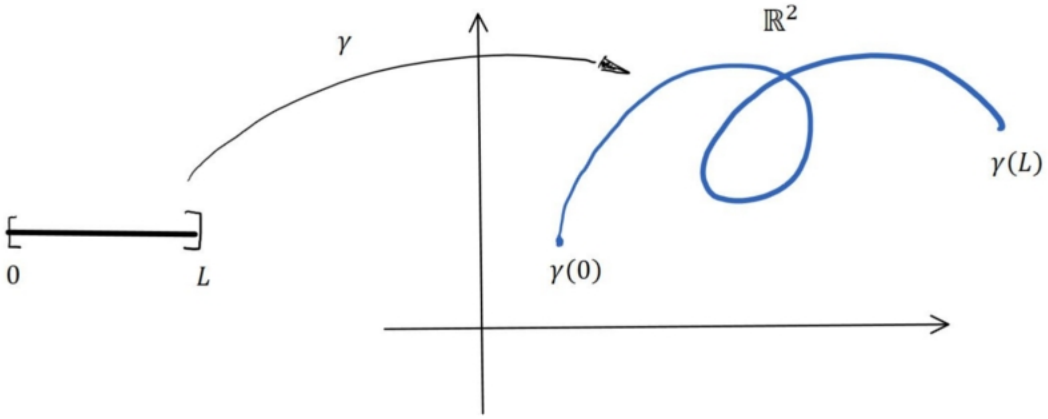

Figura 1

Sia $\varphi : [0, M] \to [0, L]$ una funzione continua, iniettiva e suriettiva. Chiamiamo φ un *cambiamento di parametro*. Allora la curva $\kappa : [0, M] \to \mathbb{R}^n$ data dalla composizione $\kappa(s) = \gamma(\varphi(s))$, per $s \in [0, M]$, si dice *riparametrizzazione* di γ. Chiaramente si ha

$$\mathrm{spt}(\kappa) = \mathrm{spt}(\gamma).$$

In generale, γ e κ percorrono la traiettoria comune (il sostegno) con "leggi orarie" diverse. Se $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(M) = L$ diremo che γ e κ hanno la stessa orientazione. Se $\varphi(0) = L$ e $\varphi(M) = 0$ diremo che γ e κ hanno orientazioni opposte.

Dunque una curva è un sostegno (luogo geometrico) più una sua parametrizzazione. Ci sono due possibili orientazioni.

Osservazione 3.2 (Curve cartesiane e in coordinate polari). Le curve piane possono anche essere date tramite un'equazione cartesiana oppure in coordinate polari.

Una curva piana $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ del tipo $\gamma(x) = (x, f(x))$ con $x \in [0, L]$ ed $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ funzione continua, si dice data in forma cartesiana (o in forma di grafico) ed $y = f(x)$ è l'*equazione cartesiana* della curva.

Sia ora $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso con $\alpha < \beta$. Data una funzione continua $\varrho : [\alpha, \beta] \to [0, \infty)$ della variabile angolare $\vartheta \in [\alpha, \beta]$, definiamo la curva piana $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(\vartheta) = \big(\varrho(\vartheta)\cos(\vartheta), \varrho(\vartheta)\sin(\vartheta)\big).$$

La curva γ si dice data in coordinate polari e l'equazione $\varrho = \varrho(\vartheta)$ si dice *equazione polare* della curva. L'equazione polare esprime il raggio in funzione dell'angolo. La funzione ϱ è la coordinata radiale della curva e per definizione si ha $\varrho \geq 0$.

Consideriamo ora una curva $\gamma \in C^1([0, L]; \mathbb{R}^n)$, questo significa che le coordinate $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ sono funzioni derivabili con continuità. Il vettore-derivata

$$\dot\gamma(t) = \big(\dot\gamma_1(t), \ldots, \dot\gamma_n(t)\big) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\gamma(t + \delta) - \gamma(t)}{\delta}$$

è la velocità istantanea della curva al tempo $t \in [0, L]$. Il significato del vettore $\dot\gamma(t)$ è descritto nella figura sotto. Indichiamo con

$$|\dot\gamma(t)| = \Big(\sum_{i=1}^{n} \dot\gamma_i(t)^2\Big)^{1/2}$$

la lunghezza della derivata $\dot\gamma(t)$.

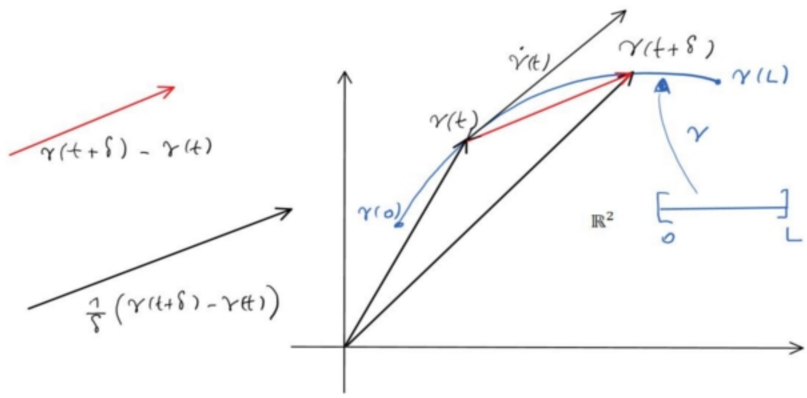

Figura 2

Definizione 3.3. Una curva $\gamma \in C^1([0, L]; \mathbb{R}^n)$ si dice regolare se $|\dot\gamma(t)| \neq 0$ per ogni $t \in [0, L]$. Il vettore

$$T(t) = \frac{\dot\gamma(t)}{|\dot\gamma(t)|}$$

si dice *campo tangente unitario* alla curva al tempo t, ovvero nel punto $\gamma(t)$.

A meno dell'orientazione, il campo tangente unitario T dipende solo dal supporto della curva γ e non dalla sua parametrizzazione.

Osservazione 3.4. La velocità $\dot\gamma(t)$ contiene tre informazioni:

1) Una direzione tangente (cioè una direzione di spostamento lineare infinitesimale) data dalla retta associata al campo T.
2) Una lunghezza $|\dot\gamma(t)|$ che dice con quale velocità istantanea ci si sta muovendo nella direzione T.
3) Un segno (orientazione) di T, che indica in quale verso (ce ne sono due) ci si sta muovendo lungo il supporto della curva.

Il concetto di "regolarità" dipende dalla parametrizzazione. Se in un qualche punto $t \in [0, L]$ si ha $\dot\gamma(t) = 0$ allora non siamo sicuri che il sostegno della curva abbia una retta tangente univocamente definita. Si consideri la curva $\gamma \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$

$$\gamma(t) = (t^3, t^2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Nel punto $t = 0$ si ha $\dot\gamma(0) = (0, 0)$. Quindi la curva non è regolare. Il suo sostegno è una cuspide con la punta nell'origine del piano. In questa punta il sostegno non ha una retta tangente.

D'altra parte, si consideri la curva $\gamma \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ definita da $\gamma(t) = (t^3, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$. Si tratta evidentemente della bisetrice del primo e terzo quadrante. È una retta parametrizzata in modo non regolare nel punto $t = 0$.

Esempio 3.5. Descriviamo alcuni esempi di curve elementari.

1. Elica cilindrica. Sia $r > 0$ un raggio fissato e sia $v \in \mathbb{R}$ un parametro di velocità fissato. La curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$\gamma(t) = \big(r \cos t, r \sin t, vt\big), \quad t \in \mathbb{R},$$

è un'elica cilindrica che ruota in modo uniforme attorno alla superficie di un cilindro di raggio r salendo in verticale con velocità v. Questa curva è regolare.

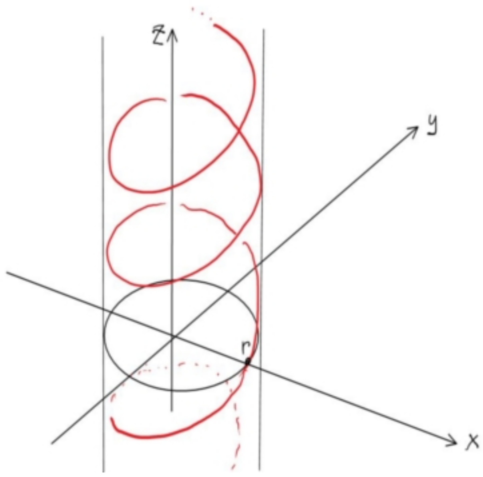

Figura 3

2. Spirale. Fissiamo un parametro $\alpha > 0$ e consideriamo la curva piana $\gamma : [0, 2/\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \begin{cases} \Big(t^\alpha \cos\big(1/t\big), t^\alpha \sin\big(1/t\big)\Big) & t \in (0, 2/\pi], \\ (0,0) & t = 0. \end{cases}$$

La curva γ è continua. È facile verificare che quando $\alpha > 2$ la curva è di classe C^1 fino al punto $t = 0$. Si tratta di una spirale che, partendo dal punto $\gamma(2/\pi) = (2/\pi)^\alpha(1,0)$ si avvolge in senso orario attorno all'origine che viene raggiunta dopo infiniti giri al tempo $t = 0$. L'orientazione è quella che parte dal centro della spirale. Il parametro $\alpha > 0$ governa la velocità con cui ci si allontana dal centro della spirale. La spirale non è regolare nel punto $t = 0$.

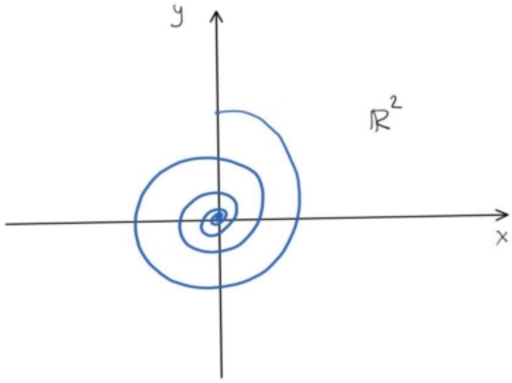

FIGURA 4

3. Cicloide. Consideriamo una ruota di bicicletta di raggio $r = 1$ sopra l'asse delle x del piano Cartesiano. Sulla ruota c'è un punto rosso che al tempo $t = 0$ si trova nell'origine del piano. La ruota si muove girando senza strisciare. Il punto rosso descrive una curva piana $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, la cicloide.

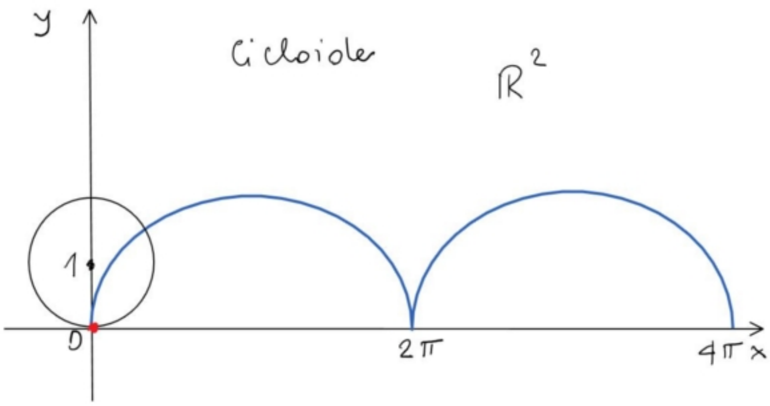

FIGURA 5

Precisamente si ha

$$\gamma(t) = (t, 1) - (\sin t, \cos t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Abbiamo sovrapposto (somma vettoriale) il moto di traslazione del centro della ruota con un moto di rotazione uniforme in senso orario. La velocità della curva è

$$\dot{\gamma}(t) = (1 - \cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo che $\dot{\gamma}(t) = (0, 0)$ se e solo se $t = 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$ numero intero. In tutti questi punti la curva non è regolare.

2. Curve rettificabili. Formula della lunghezza

Con abuso di notazione, indicheremo una suddivisione σ dell'intervallo $[0, L]$ nel seguente modo $\sigma = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = L\}$, per qualche $k \in \mathbb{N}$. Sia $\mathscr{S}([0, L])$ l'insieme delle suddivisioni σ di $[0, L]$.

Definizione 3.6. Definiamo la *variazione totale o lunghezza* di una curva $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^n$ nel seguente modo

$$L(\gamma) = \sup_{\sigma \in \mathscr{S}([0,L])} \sum_{t_i \in \sigma} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|. \tag{3.1}$$

Se $L(\gamma) < \infty$ diremo che γ è rettificabile.

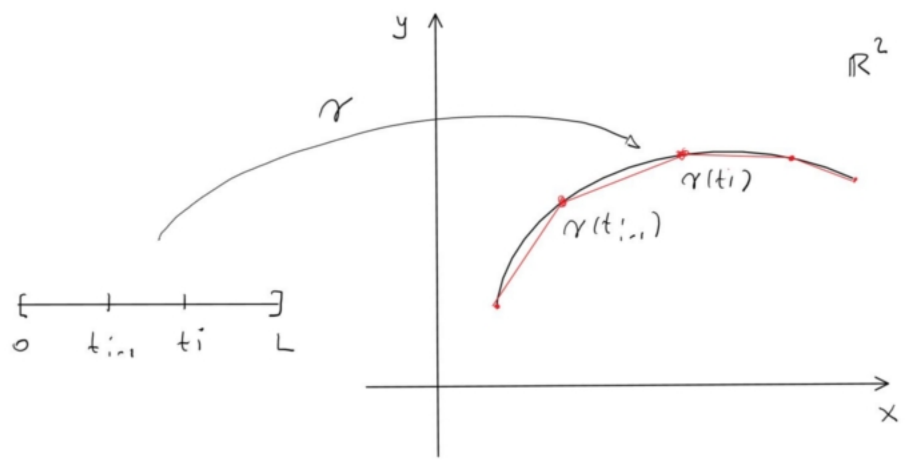

Figura 6

Osserviamo che la lunghezza di una curva non dipende dalla parametrizzazione.

Osservazione 3.7. Nel seguente teorema useremo i seguenti fatti relativi all'integrazione di funzioni vettoriali. Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, una funzione continua e indichiamo con $f = (f_1, \ldots, f_n)$ le sue coordinate. Allora scriveremo

$$\int_0^1 f(t)dt = \Big(\int_0^1 f_1(t)dt, \ldots, \int_0^1 f_n(t)dt \Big)$$

per indicare l'integrale della funzione vettoriale.

Indichiamo con $|x| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$ la norma standard di $\mathbb{R}^n$. Allora l'integrazione vettoriale ha la seguente proprietà di subadditività

$$\Big| \int_0^1 f(t)dt \Big| \leq \int_0^1 |f(t)|dt. \tag{3.2}$$

TEOREMA 3.8 (Formula della lunghezza). Le curve $\gamma \in C^1([0, L]; \mathbb{R}^n)$ sono rettificabili e vale la formula della lunghezza

$$L(\gamma) = \int_0^L |\dot{\gamma}(t)|dt. \tag{3.3}$$

Dim. Possiamo supporre $L = 1$. Sia $\sigma \in \mathscr{S}([0, 1])$ una scomposizione $\sigma = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1\}$. Dal Teorema fondamentale del calcolo per le funzioni vettoriali e per la (3.2) si trova

$$\sum_{i=1}^k |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^k \Big| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\gamma}(s)ds \Big| \leq \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{\gamma}(s)|ds = \int_0^1 |\dot{\gamma}(s)|ds.$$

La stima vale per ogni σ e passando all'estremo superiore su σ si trova

$$L(\gamma) \leq \int_0^1 |\dot{\gamma}(s)|ds.$$

Per dimostrare la disuguaglianza opposta bisogna trovare una suddivisione "quasi ottimale". Fissiamo un parametro $\varepsilon > 0$. Siccome le componenti della funzione $\dot{\gamma} : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ sono continue, allora sono uniformemente continue su $[0, 1]$. Di conseguenza esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $s, t \in [0, 1]$ si ha

$$|s - t| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\dot{\gamma}(s) - \dot{\gamma}(t)| < \varepsilon. \tag{3.4}$$

Sia $\sigma = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1\}$ una scomposizione tale che $0 < t_i - t_{i-1} < \delta$. Usando la subadditività $|x + y| \leq |x| + |y|$, la (3.2) e la (3.4) si trova

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |\dot{\gamma}(s)|ds &= \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{\gamma}(s)|ds \\
&= \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{\gamma}(s) - \dot{\gamma}(t_{i-1}) + \dot{\gamma}(t_{i-1})|ds \\
&\leq \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{\gamma}(s) - \dot{\gamma}(t_{i-1})|ds + \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{\gamma}(t_{i-1})|ds \\
&\leq \varepsilon + \sum_{i=1}^k \Big| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\gamma}(t_{i-1})ds \Big| \\
&\leq \varepsilon + \sum_{i=1}^k \Big| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\gamma}(t_{i-1}) - \dot{\gamma}(s) + \dot{\gamma}(s)ds \Big| \\
&\leq \varepsilon + \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{\gamma}(t_{i-1}) - \dot{\gamma}(s)|ds + \Big| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\gamma}(s)ds \Big| \\
&\leq 2\varepsilon + \sum_{i=1}^k |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|.
\end{aligned}$$

Siccome $\varepsilon > 0$ è arbitrariamente piccolo, la tesi segue.

□

Osservazione 3.9. Vogliamo ricavare la formula della lunghezza per le curve date in coordinate polari. Sia γ una curva data dall'equazione polare $\varrho = \varrho(\vartheta)$, dove $\varrho \in C^1([\alpha, \beta])$. La velocità della curva γ è, in un generico ϑ,

$$\dot{\gamma} = \big(\dot{\varrho}\cos\vartheta - \varrho\sin\vartheta, \dot{\varrho}\sin\vartheta + \varrho\cos\vartheta\big),$$

e quindi

$$|\dot{\gamma}| = \sqrt{\dot{\varrho}^2 + \varrho^2}.$$

In conclusione, per la formula della lunghezza (3.3), si trova

$$L(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{\varrho}(\vartheta)^2 + \varrho(\vartheta)^2}d\vartheta.$$

Questa è la formula per la lunghezza in coordinate polari.

3. Riparametrizzazione a lunghezza d'arco

Le curve regolari hanno una riparametrizzazione canonica, chiamata riprametrizzazione a lunghezza d'arco.

Definizione 3.10. Una curva regolare $\gamma \in C^1([0, L]; \mathbb{R}^n)$ si dice *parametrizzata a lunghezza d'arco* se $|\dot{\gamma}(t)| = 1$ per ogni $t \in [0, L]$.

Dunque, parametrizzazione a lunghezza d'arco equivale a dire velocità costante unitaria. La restrizione di γ ad un intervallo $[t_1, t_2] \subset [0, L]$ verifica, per la formula della lunghezza,

$$L(\gamma\big|_{[t_1,t_2]}) = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\gamma}(t)|dt = t_2 - t_1,$$

ed in particolare $L = L(\gamma)$ è la lunghezza totale. Questo giustifica l'espressione "lunghezza d'arco".

Teorema 3.11. Ogni curva regolare $\gamma \in C^1([0, L]; \mathbb{R}^n)$ ammette una riparametrizzazione a lunghezza d'arco.

Dim. Si consideri la funzione $\psi \in C^1([0, L])$ definita nel seguente modo

$$\psi(t) = \int_0^t |\dot{\gamma}(s)|ds, \quad t \in [0, L].$$

Per il teorema di derivazione di funzioni integrasli si ha $\psi'(t) = |\dot{\gamma}(t)| > 0$, essendo γ regolare. Dunque ψ è strettamente crescente, si ha $\psi(0) = 0$, si può porre $M = \psi(L)$, ed è definita la funzione inversa $\varphi = \psi^{-1} : [0, M] \to [0, L]$, che è derivabile e verifica verifica

$$\varphi'(s) = \frac{1}{\psi'(t)}, \quad \text{se } t = \varphi(s). \tag{3.5}$$

Consideriamo la riparametrizzazione $\kappa \in C^1([0, M]; \mathbb{R}^n)$

$$\kappa(s) = \gamma(\varphi(s)), \quad s \in [0, M].$$

Per la formula della derivata della funzione composta con $\varphi(s) = t$ si ha

$$\dot{\kappa}(s) = \dot{\gamma}(\varphi(s))\varphi'(s) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|},$$

e dunque $|\dot{\kappa}| = 1$ in ogni punto.

□

4. Integrali curvilinei

Sia $\gamma \in C^1([0, L]; \mathbb{R}^n)$ una curva e sia $f : \mathrm{spt}(\gamma) \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

Definizione 3.12 (Integrale curvilineo). L'integrale curvilineo di f lungo la curva γ è definito nel seguente modo

$$\int_\gamma f\, ds = \int_0^L f(\gamma(t))|\dot{\gamma}(t)|dt.$$

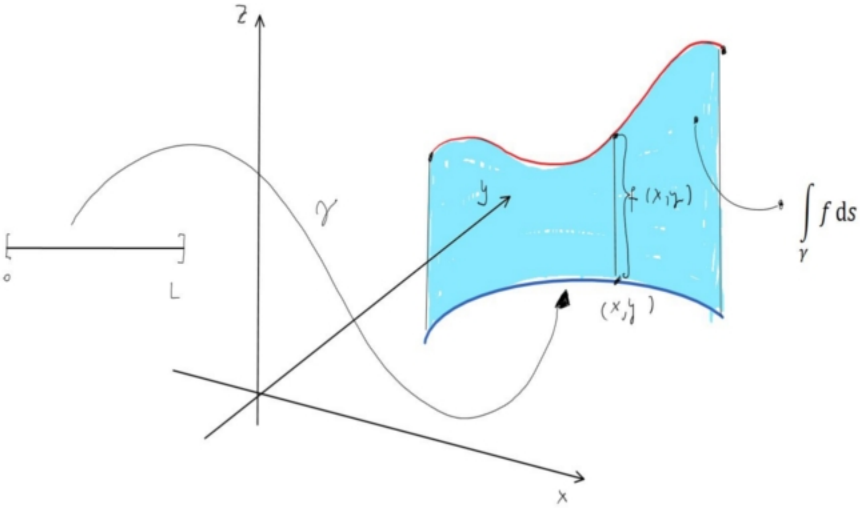

Figura 7

Con la scelta $f = 1$ costante, la formula restituisce la lunghezza della curva. Dunque, possiamo pensare al simbolo ds come all'elemento di lunghezza curvilinea infinitesimale lungo γ.

Osservazione 3.13. Proviamo che l'integrale curvilineo non dipende dalla parametrizzazione della curva, ma solo dal suo sostegno.

Sia $\varphi : [0, M] \to [0, L]$ un cambiamento di parametro di classe C^1. Ci sono due casi $\varphi' \leq 0$ in tutti i punti oppure $\varphi' \geq 0$ in tutti i punti. Supponiamo che sia $\varphi' \leq 0$ e quindi $\varphi(0) = L$ e $\varphi(M) = 0$. Consideriamo la riparametrizzazione $\kappa(\tau) = \gamma(\varphi(\tau))$ per $\tau \in [0, M]$. Vogliamo provare che

$$\int_\kappa f\, ds = \int_\gamma f\, ds.$$

Per la definizione di integrale curvilineo e per il teorema del cambiamento di variabile negli integrali di Riemann (si pone $t = \varphi(\tau)$) si trova

$$\begin{aligned}\int_\kappa f\,ds &= \int_0^M f(\kappa(\tau))|\dot\kappa(\tau)|\,d\tau \\ &= \int_0^M f(\gamma(\varphi(\tau)))\,|\varphi'(\tau)\dot\gamma(\varphi(\tau))|\,d\tau \\ &= -\int_0^M f(\gamma(\varphi(\tau)))\,|\dot\gamma(\varphi(\tau))|\varphi'(\tau)\,d\tau \\ &= \int_0^L f(\gamma(t))|\dot\gamma(t)|\,dt = \int_\gamma f\,ds.\end{aligned}$$

Esempio 3.14 (Lavoro di un campo di forze lungo una curva). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Una funzione $F : A \to \mathbb{R}^n$ si dice *campo vettoriale*. Ad ogni punto $x \in A$ il campo vettoriale F associa il vettore $F(x) \in \mathbb{R}^n$.

Supponiamo che F sia un campo vettoriale continuo in A e sia $\gamma \in C^1([0, L]; \mathbb{R}^n)$ una curva regolare con supporto contenuto in A. Indichiamo con

$$T = \frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|}$$

il campo unitario tangente alla curva. La componente (proiezione) di F lungo la direzione T è data dal prodotto scalare $\langle F, T\rangle = F_1T_1 + \ldots + F_nT_n$. Il lavoro di F lungo γ è dunque

$$L = \int_\gamma \langle F, T\rangle\,ds = \int_0^L \langle F(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle\,dt.$$

Questo integrale cambia segno se a T si sostituisce $-T$, ovvero è sensibile all'orientazione della curva. Si osservi che l'ultimo integrale è ben definito anche per le curve non regolari.

5. Esercizi con soluzione

Esercizio 3.1. Sia $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la curva piana $\gamma(t) = (t^2, 2t^3/3 - t^2)$, con $t \in \mathbb{R}$. Stabilire se γ è semplice e se è regolare. Calcolare, quando possibile, il campo unitario tangente T. Calcolare i limiti destro e sinistro

$$\lim_{t\to 0^\pm} T(t).$$

Infine, disegnare il supporto della curva γ.

Soluzione. Dati $s, t \in \mathbb{R}$, si ha $\gamma(s) = \gamma(t)$ se e solo se

$$\begin{cases} s^2 = t^2 \\ \frac{2}{3}s^3 - s^2 = \frac{2}{3}t^3 - t^2 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} s^2 = t^2 \\ s^3 = t^3 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad s = t.$$

Quindi γ è iniettiva (semplice).

La derivata di γ è $\dot\gamma(t) = 2(t, t^2 - t)$ e quindi $\dot\gamma(t) = 0$ se e solo se $t = 0$. Nel punto $t = 0$ (e solo in questo) la curva γ non è regolare. Per $t \neq 0$ si può calcolare il campo tangente unitario

$$T(t) = \frac{\dot\gamma(t)}{|\dot\gamma(t)|} = \frac{(t, t^2 - t)}{\sqrt{t^2 + (t^2 - t)^2}} = \frac{t(1, t - 1)}{|t|\sqrt{1 + (t - 1)^2}}.$$

Quindi si ha

$$\lim_{t\to 0^+} T(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t(1,t-1)}{|t|\sqrt{1+(t-1)^2}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{(1,t-1)}{\sqrt{1+(t-1)^2}} = \frac{(1,-1)}{\sqrt{2}},$$

$$\lim_{t\to 0^-} T(t) = -\frac{(1,-1)}{\sqrt{2}}.$$

I due vettori limite sono opposti.

Per disegnare il supporto della curva, cerchiamo di esprimerla come grafico di funzione. Ad esempio possiamo porre $x = t^2 \geq 0$ e ricavare la t in funzione della x. Ci sono due casi, a seconda del segno di t.

Caso 1: $t \geq 0$. In questo caso si trova $t = \sqrt{x}$ e quindi

$$\gamma(t) = (t^2, 2t^3/3 - t^2) = (x, 2x^{3/2}/3 - x), \quad x \geq 0.$$

Ci siamo ricondotti allo studio della funzione $f(x) = 2x^{3/2}/3 - x$ che ha derivata $f'(x) = \sqrt{x} - 1$. Quindi f decresce su $[0,1]$ e cresce su $[1,\infty)$ circa come la potenza $x^{3/2}$.

Caso 2: $t \leq 0$. In questo caso si trova $t = -\sqrt{x}$ e quindi

$$\gamma(t) = (t^2, 2t^3/3 - t^2) = (x, -2x^{3/2}/3 - x), \quad x \geq 0.$$

Ci siamo ricondotti allo studio della funzione $g(x) = -2x^{3/2}/3 - x$ che è chiaramente decrescente.

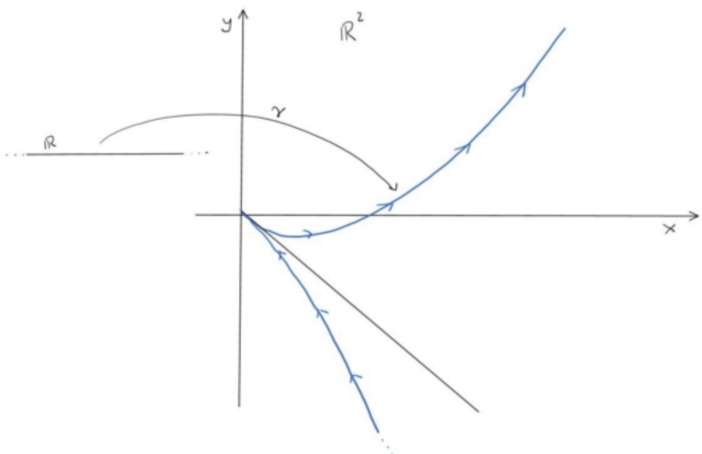

Figura 8

□

Esercizio 3.2. Si consideri il tratto di cicloide $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Posto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y - 1 \geq 0\}$, si consideri la funzione $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y - 1}$. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la curva $\gamma_\alpha : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_\alpha(t) = (t, 1 - \alpha t^2)$, $|t| \leq 1$. Determinare i valori di α per cui l'integrale curvilineo

$$I_\alpha = \int_{\gamma_\alpha} f\, ds$$

è ben definito e calcolarlo.

Soluzione. Affinchè l'integrale sia ben definito deve essere $\gamma_\alpha(t) \in A$ per ogni $t \in [-1, 1]$, ovvero $t^2 + 1 - \alpha t^2 - 1 \geq 0$, ovvero $t^2(1 - \alpha) \geq 0$ per ogni $t \in [-1, 1]$. Questo si verifica se e solo se $\alpha \leq 1$.

La derivata di γ è $\dot\gamma(t) = (1, -2\alpha t)$ e la sua lunghezza è $|\dot\gamma(t)| = \sqrt{1 + 4\alpha^2 t^2}$. Inoltre si ha

$$f(\gamma(t)) = \sqrt{t^2 + 1 - \alpha t^2 - 1} = |t|\sqrt{1 - \alpha}.$$

Dunque, si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_\alpha} f\, ds &= \int_{-1}^{1} f(\gamma(t))|\dot\gamma(t)|\, dt \\
&= \int_{-1}^{1} |t|\sqrt{1-\alpha}\sqrt{1 + 4\alpha^2 t^2} dt = 2\sqrt{1-\alpha}\int_0^1 t\sqrt{1 + 4\alpha^2 t^2} dt \\
&= \sqrt{1-\alpha}\int_0^1 \sqrt{1 + 4\alpha^2 s} ds = \sqrt{1-\alpha}\Big[\frac{(1 + 4\alpha^2 s)^{3/2}}{6\alpha^2}\Big]_{s=0}^{s=1} \\
&= \frac{\sqrt{1-\alpha}}{6\alpha^2}\big((1 + 4\alpha^2)^{3/2} - 1\big).
\end{aligned}$$

Quando $\alpha = 0$ si ha chiaramente $I_0 = 1$. $\square$

Esercizio 3.3. Sia $\alpha > 0$ un parametro e consideriamo la curva piana $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \Big(t^2 \cos\Big(\frac{1}{t^\alpha}\Big), t^2 \sin\Big(\frac{1}{t^\alpha}\Big)\Big), \quad \text{se } t \in (0, 1], \quad \text{e} \quad \gamma(0) = (0, 0).$$

1) Riparametrizzare γ in coordinate polari e disegnare approx. il sostegno di γ.
2) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che la curva γ sia rettificabile.

Soluzione. 1) Con il cambiamento di parametro $\vartheta = \frac{1}{t^\alpha}$, ovvero $t = \frac{1}{\vartheta^{1/\alpha}}$ si ottiene la curva

$$\varphi(\vartheta) = \big(\vartheta^{-2/\alpha}\cos(\vartheta), \vartheta^{-2/\alpha}\sin(\vartheta)\big), \quad \vartheta \in [1, \infty),$$

e $\varphi(\infty) = (0, 0)$. La curva φ è una riparametrizzazione di γ e la sua equazione polare è $\varrho = \vartheta^{-2/\alpha}$. Il sostegno di γ è una spirale che si avvicina in senso antiorario all'origine del piano $\mathbb{R}^2$.

2) Dalla formula per la lunghezza in coordinate polari si ha (la lunghezza non dipende dalla parametrizzazione):

$$L(\gamma) = \int_1^\infty \sqrt{\varrho^2 + \dot\varrho^2} d\vartheta = \int_1^\infty \sqrt{\vartheta^{-4/\alpha} + \frac{4}{\alpha^2}\vartheta^{-4/\alpha - 2}} d\vartheta = \int_1^\infty \frac{1}{\vartheta^{2/\alpha}}\sqrt{1 + \frac{4}{\alpha^2\vartheta^2}} d\vartheta.$$

La curva γ è rettificabile se e solo se l'ultimo integrale improprio è convergente. Per il criterio del confronto asintotico, l'integrale improprio converge esattamente quando converge l'integrale

$$\int_1^\infty \frac{1}{\vartheta^{2/\alpha}} d\vartheta < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{\alpha} > 1.$$

Quindi la curva è rettificabile se e solo se $\alpha < 2$.

$\square$

Esercizio 3.4. Sia $\gamma : [0, 1/2] \to \mathbb{R}^2$ la curva data dall'equazione polare

$$\varrho = \begin{cases} -\dfrac{1}{\log \vartheta} & \vartheta \in (0, 1/2], \\ 0 & \vartheta = 0, \end{cases}$$

ovvero $\gamma(\vartheta) = \big(\varrho(\vartheta)\cos\vartheta, \varrho(\vartheta)\sin\vartheta\big)$. Dopo aver calcolato l'integrale improprio

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\vartheta(\log\vartheta)^2} d\vartheta,$$

verificare che γ è rettificabile.

Soluzione. L'integrale si può calcolare con la sostituzione $s = \log(\vartheta)$:

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} \frac{1}{\vartheta(\log\vartheta)^2} d\vartheta &= \int_{-\infty}^{\log(1/2)} \frac{1}{s^2} ds = \lim_{M\to-\infty} \int_M^{\log(1/2)} \frac{1}{s^2} ds \\ &= \lim_{M\to-\infty} \Big[-\frac{1}{s} \Big]_{s=M}^{\log(1/2)} = -\frac{1}{\log(1/2)} = \frac{1}{\log 2}.\end{aligned}$$

Ricordiamo che la lunghezza di una curva γ data in coordinate polari dall'equazione $\varrho = \varrho(\vartheta)$ è

$$L(\gamma) = \int_0^{1/2} \sqrt{\varrho^2 + \dot\varrho^2} d\vartheta.$$

Nel caso in esame si ha

$$\begin{aligned}L(\gamma) &= \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1}{\log^2\vartheta} + \frac{1}{\vartheta^2\log^4\vartheta}} d\vartheta \\ &= \int_0^{1/2} \frac{1}{\vartheta\log^2\vartheta} \sqrt{1 + \vartheta^2\log^2\vartheta} d\vartheta.\end{aligned}$$

Si tratta di un integrale improprio di funzione non limitata. La curva γ è rettifiabile se e solo se l'integrale improprio converge.

Per studiare la convergenza osserviamo che

$$\lim_{\vartheta\to0^+} \vartheta^2\log^2\vartheta = 0.$$

Questo fatto è noto e può essere verificato ad esempio con il Teorema di Hospital. Dunque, utilizzando il criterio del confronto asintotico, lo studio della rettificabilità di γ si riduce a studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\vartheta\log^2\vartheta} d\vartheta$$

che, come visto sopra, converge. Dunque γ è rettificabile. $\square$

CAPITOLO 4

Spazi metrici

1. Definizioni ed esempi

Uno spazio metrico è un insieme di elementi sul quale è definita una nozione di distanza.

Definizione 4.1 (Spazio metrico). Uno spazio metrico è una coppia (X, d) dove X è un insieme e $d : X \times X \to [0, \infty)$ è una funzione, detta *metrica* o *distanza*, che per ogni $x, y, z \in X$ verifica le seguenti proprietà:

1) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
2) $d(x, y) = d(y, x)$ (simmetria);
3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (disuguaglianza triangolare).

Esempio 4.2. Elenchiamo alcuni esempi di spazi metrici.

1) I numeri reali $\mathbb{R}$ con la funzione $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$, sono uno spazio metrico.
2) I numeri reali $\mathbb{R}$ con la funzione $d(x, y) = |x-y|^{1/2}$, $x, y \in \mathbb{R}$, sono uno spazio metrico. Esercizio: dimostrare che vale la disuguaglianza triangolare.
3) I numeri complessi $\mathbb{C}$ con la funzione $d(z, w) = |z - w|$, $z, w \in \mathbb{C}$, sono uno spazio metrico. La distanza d è la usuale distanza Euclidea.
4) Lo spazio n-dimensionale $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, con la funzione distanza
$$d(x, y) = |x - y| = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \Big)^{1/2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$
è uno spazio metrico.
5) Spazio metrico discreto. Sia X un insieme e definiamo la funzione $d : X \times X \to [0, \infty)$
$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y, \\ 1 & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$
È facile verificare che d verifica gli assiomi della funzione distanza. (X, d) si dice spazio metrico discreto.
6) I numeri naturali $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ con la distanza
$$d(m, n) = \Big| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \Big|, \quad m, n \in \mathbb{N},$$
sono uno spazio metrico.

Fissato un punto $x \in X$ ed un raggio $r \geq 0$, l'insieme
$$B_r(x) = B(x, r) = B_X(x, r) = \big\{ y \in X : d(x, y) < r \big\}$$
si dice *sfera* o *palla* (aperta) di centro x e raggio r. Nel seguito, useremo le palle per definire una *topologia* su uno spazio metrico.

Problema 4.3 (Spazio metrico restrizione). Sia X uno spazio metrico con distanza $d : X \times X \to [0, \infty)$. Dato un sottoinsieme $Y \subset X$, possiamo restringere la funzione distanza d ad Y: $d : Y \times Y \to [0, \infty)$. Verificare che anche (Y, d) è uno spazio metrico e verificare che le palle nella distanza d di Y sono fatte nel seguente modo:

$$B_Y(y, r) = B_X(y, r) \cap Y,$$

per ogni $y \in Y$ ed $r \geq 0$.

Spazi metrici possono essere generati a partire dagli spazi normati.

Definizione 4.4 (Spazio normato). Uno spazio normato (reale) è una coppia $(V, \|\cdot\|)$ dove V è uno spazio vettoriale reale e $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ è una funzione, detta *norma*, che per ogni $x, y \in V$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ verifica le seguenti proprietà:

1) $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$;
2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ (omogeneità);
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (subadditività o disuguaglianza triangolare).

Chiaramente, $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ed $\mathbb{R}^n$ sono spazi normati con le norme naturali. Una norma $\|\cdot\|$ su uno spazio vettoriale V induce una distanza d su V nel seguente modo:

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in V.$$

La disuguaglianza triangolare per la distanza d deriva dalla subadditività della norma $\|\cdot\|$. Infatti, per ogni $x, y, z \in V$ si ha:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y).$$

Esempio 4.5 (Spazio metrico Euclideo). La funzione $|\cdot| : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, $n \geq 1$, così definita

$$|x| = \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{1/2}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

è una norma su $\mathbb{R}^n$, detta *norma Euclidea*. Lo spazio metrico corrispondente $(\mathbb{R}^n, d)$, dove $d(x, y) = |x - y|$, si dice spazio (metrico) Euclideo.

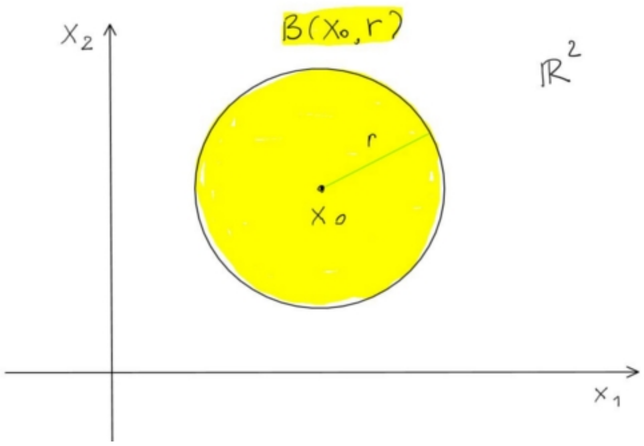

Figura 1

L'insieme

$$B_r(x) = \big\{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\big\}$$

è la palla Euclidea di raggio $r \geq 0$ centrata in $x \in \mathbb{R}^n$.

Con la notazione

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

per il *prodotto scalare standard* di $\mathbb{R}^n$, la norma Euclidea si esprime nel seguente modo: $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Il significato geometrico del prodotto scalare è il seguente: quando $|x| = 1$, il numero $\langle x, y \rangle$ è la lunghezza con segno della proiezione ortogonale di y sulla retta individuata da x.

Il prodotto scalare è bi-lineare nelle due componenti, è simmetrico, ed è non degenere. Precisamente, per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti propretà:

1) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$;
2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
3) $\langle x, x \rangle = 0$ se e solo se $x = 0$.

Talvolta, il prodotto scalare si indica anche con il simbolo (x, y) oppure con $x \cdot y$.

La verifica delle proprietà 1) e 2) per la norma Euclidea è elementare. Per verificare la subadditività occorre la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Proposizione 4.6 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale la disuguaglianza

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x||y|.$$

Dim. Il polinomio reale della variabile $t \in \mathbb{R}$:

$$P(t) = |x + ty|^2 = |x|^2 + 2t\langle x, y \rangle + t^2 |y|^2$$

non è mai negativo, $P(t) \geq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, e dunque il suo discriminante verifica $\Delta = 4\langle x, y \rangle^2 - 4|x|^2|y|^2 \leq 0$. La tesi segue. □

Verifichiamo la subadditività della norma Euclidea. Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$|x + y|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = |x|^2 + 2\langle x, y \rangle + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

ed estraendo le radici si ottiene la proprietà 3) di una norma.

Problema 4.7. Supponiamo che risulti $\langle x, y \rangle = |x||y|$. Cosa possiamo dire sui vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$?

Esempio 4.8 (Norma della convergenza uniforme). Consideriamo l'insieme $V = C([0, 1])$ delle funzioni continue sull'intervallo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. L'insieme V è uno spazio vettoriale reale. La funzione $\|\cdot\|_\infty : V \to [0, \infty)$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

è una norma, detta *norma della convergenza uniforme* o *norma del sup*. L'estremo superiore è un massimo per il Teorema di Weierstrass. Verifichiamo ad esempio la disuguaglianza triangolare per $f, g \in V$:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_\infty &= \sup_{x \in [0,1]} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| + |g(x)| \\ &\leq \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Dati $f \in C([0,1])$ ed $r \geq 0$, la palla

$$B_r(f) = \big\{ g \in C([0,1]) : |f(x) - g(x)| < r \text{ per ogni } x \in [0,1] \big\}$$

è l'insieme delle funzioni continue g il cui grafico è contenuto nella striscia di spessore $2r$ attorno al grafico di f.

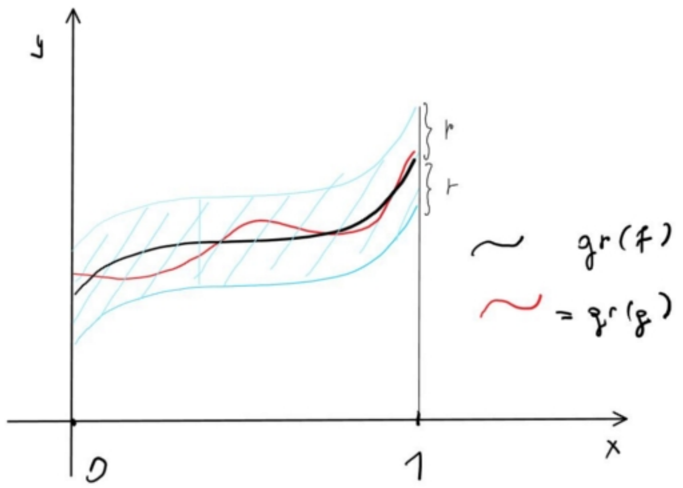

Figura 2

Esempio 4.9 (Norma integrale). Consideriamo l'insieme $V = C([0,1])$ delle funzioni continue a valori reali definite sull'intervallo $[0,1] \subset \mathbb{R}$. La funzione $\|\cdot\|_1 : V \to [0,\infty)$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$$

è una norma, detta *norma della convergenza* $L^1([0,1])$. La verifica delle proprietà della norma è elementare. Ad esempio, la subadditività della norma $\|\cdot\|_1$ segue dalla subadditività del valore assoluto e dalla monotonia dell'integrale. Precisamente, per $f, g \in V$ si ha

$$\|f+g\|_1 = \int_0^1 |f(x)+g(x)| dx \leq \int_0^1 \big(|f(x)| + |g(x)|\big) dx = \int_0^1 |f(x)| dx + \int_0^1 |g(x)| dx.$$

La palla centrata nella funzione nulla $f = 0$

$$B_r(0) = \Big\{ g \in C([0,1]) : \int_0^1 |g(x)| dx < r \Big\}$$

è l'insieme delle funzioni continue g con integrale di $|g|$ minore di $r \geq 0$.

2. Successioni in uno spazio metrico e funzioni continue

Una successione in uno spazio metrico (X,d) è una funzione $x : \mathbb{N} \to X$. Si usa la seguente notazione $x_n = x(n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e la successione si indica con $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Definizione 4.10 (Successione convergente). Una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad un punto $x \in X$ nello spazio metrico (X, d) se

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0,$$

ovvero se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha $d(x_n, x) \leq \varepsilon$. In questo caso si scrive anche $x_n \to x$ per $n \to \infty$ in (X, d) oppure anche

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

e si dice che la successione è *convergente* ovvero che x è il limite della successione.

Se il limite di una successione esiste allora è unico. Se infatti $x, y \in X$ sono entrambi limiti di $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, allora risulta

$$0 \leq d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \to 0, \quad n \to \infty,$$

e quindi $d(x, y) = 0$ ovvero $x = y$.

Definizione 4.11. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sia $x_0 \in X$. Una funzione $f : X \to Y$ si dice continua nel punto $x_0 \in X$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in X$ vale

$$d_X(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

La funzione si dice *continua* se è continua in tutti i punti di X.

La definizione di limite è analoga.

Definizione 4.12. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici, $x_0 \in X$ ed $y_0 \in Y$, sia $f : X \setminus \{x_0\} \to Y$ una funzione. Diremo che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in X$ vale

$$0 < d_X(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), y_0) < \varepsilon.$$

Negli spazi metrici, la continuità è equivalente alla continuità sequenziale, nel senso del seguente teorema.

Teorema 4.13. Siano $f : X \to Y$ e $x_0 \in X$. Sono equivalenti le seguenti due affermazioni:

A) f è continua in x_0;

B) Per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X vale l'implicazione:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ in } X \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \text{ in } Y.$$

Dim. A)⇒B). Fissato $\varepsilon > 0$, dalla continuità di f segue l'esistenza di $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in X$ vale:

$$d_X(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Dalla convergenza della successione segue l'esistenza di $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si ha $d_X(x_n, x_0) < \delta$. Quindi per tali $n \geq \bar{n}$ deve essere $d_Y(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$.

B)⇒A). Supponiamo per assurdo che f non sia continua in $x_0 \in X$. Allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono dei punti $x_n \in X$ tali che $d_X(x_n, x_0) < 1/n$ ma $d_Y(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$. La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contraddice l'affermazione B).

□

Per le funzioni $f : X \to \mathbb{R}$ a valori reali si possono definire in modo naturale le operazioni di somma, moltiplicazione e reciproco. Queste funzioni ereditano la continuità delle funzioni da cui sono composte.

Teorema 4.14. Sia (X, d_X) uno spazio metrico e sia $\mathbb{R}$ munito della distanza Euclidea. Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ funzioni continue in un punto $x_0 \in X$. Allora:

i) La funzione somma $f + g : X \to \mathbb{R}$ è continua nel punto x_0;
ii) La funzione prodotto $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ è continua nel punto x_0;
iii) Se $f \neq 0$ su X, allora la funzione reciproca $1/f : X \to \mathbb{R}$ è continua in x_0.

La dimostrazione si basa sulle analoghe proprietà dei limiti di successioni reali ed è omessa.

Specializziamo ora la discussione al caso $X = \mathbb{R}^n$ e $Y = \mathbb{R}^m$, $n, m \geq 1$, entrambi muniti della rispettiva distanza Euclidea. Più precisamente, dato un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ consideriamo lo spazio metrico (A, d) dove d è la distanza Euclidea su A ereditata dallo spazio ambiente.

Teorema 4.15. Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione, $f = (f_1, \ldots, f_m)$, e sia $x_0 \in A \subset \mathbb{R}^m$ un punto fissato. Sono equivalenti:

A) f è continua in x_0;
B) le funzioni coordinate $f_1, \ldots, f_m : A \to \mathbb{R}$ sono continue in x_0.

Dim. L'implicazione A)⇒B) segue dalla disuguaglianza

$$|f_i(x) - f_i(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)|$$

che vale per ogni $i = 1, \ldots, m$ e per ogni $x \in A$.

L'implicazione B)⇒A) si verifica nel seguente modo. Fissato $\varepsilon > 0$, per ogni $i = 1, \ldots, m$ esiste $\delta_i > 0$ tale che

$$|x - x_0| < \delta_i \quad \Rightarrow \quad |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon.$$

Con la scelta $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$ vale allora l'implicazione

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \sqrt{m}\varepsilon.$$

Questo termina la dimostrazione. □

Osservazione 4.16. L'Esercizio 4.3 mostra che esistono funzioni $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

1) La funzione $x \mapsto f(x, y)$ è continua in $x \in \mathbb{R}$, per ogni $y \in \mathbb{R}$ fissato;
2) La funzione $y \mapsto f(x, y)$ è continua in $y \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ fissato;
3) La funzione $(x, y) \mapsto f(x, y)$ non è continua, ad esempio nel punto $(0, 0)$.

3. Convergenza uniforme di successioni di funzioni

Sia (X, d) uno spazio metrico e siano $f, f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, funzioni. Diciamo che la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente ad f su X se risulta

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Definizione 4.17 (Convergenza uniforme). Diciamo che la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente ad f su X se per ogni $x \in X$ risulta

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

cioè se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n$ e per ogni $x \in X$ si abbia

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Il valore $\bar{n}$ è uniforme per tutti gli $x \in X$.

La convergenza uniforme implica quella puntuale ma non viceversa.

Esempio 4.18. Sia $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, la funzione $f_n(x) = x^n$. Per $x \in [0,1]$ si ha il limite puntuale

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

D'altra parte la convergenza non è uniforme su $[0,1]$ in quanto per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = 1.$$

Questo estremo superiore può essere equivalentemente calcolato su $[0,1)$. Si ha invece convergenza uniforme su ogni intervallo del tipo $[0,\delta]$ con $0 \leq \delta < 1$.

3.1. Convergenza uniforme e continuità. La continuità delle funzioni è stabile per la convergenza uniforme.

Teorema 4.19 (Scambio dei limiti). Siano (X, d) uno spazio metrico ed $f, f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, funzioni. Supponiamo che:

(i) $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$;
(ii) Ogni funzione f_n è continua nel punto $x_0 \in X$.

Allora esistono e sono uguali i seguenti limiti

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x). \tag{4.1}$$

In particolare, f è continua in x_0.

Dim. Dobbiamo provare che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per la convergenza uniforme esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha per ogni $x \in X$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$$

Scegliamo un $n \geq \bar{n}$. Per la continuità di f_n in x_0 esiste $\delta > 0$ tale che

$$d(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3.$$

Dunque, per $d(x, x_0) < \delta$ avremo

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Questo prova la continuità di f nel punto x_0 e con ciò la formula sullo scambio dei limiti (4.1). $\square$

Se le funzioni f_n del Teorema 4.19 sono continue in ogni punto allora anche la funzione limite f sarà continua in ogni punto. Dunque si ha il seguente corollario.

Corollario 4.20. Siano (X, d) uno spazio metrico ed $f, f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, funzioni. Supponiamo che $f_n \in C(X)$ siano funzioni continue su X per ogni $n \in \mathbb{N}$ e che $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. Allora, anche $f \in C(X)$, ovvero f è continua su X.

3.2. Convergenza uniforme e differenziabilità. Ci specializziamo all'intervallo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Proveremo che se una successione di funzioni derivabili converge in un punto e le derivate convergono uniformemente, allora la successione converge uniformemente e la funzione limite è derivabile.

Teorema 4.21. Sia $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni derivabili. Supponiamo che:

i) Esista $x_0 \in [0, 1]$ tale che la successione $\big(f_n(x_0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
ii) La successione di funzioni $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente ad una funzione $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$.

Allora la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente su $[0, 1]$ ad una funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, f è derivabile ed $f'(x) = g(x)$ per ogni $x \in [0, 1]$.

Dim. Proviamo innanzi tutto che la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente. Sarà sufficiente verificare che la successione è uniformemente di Cauchy. Dati $n, m \in \mathbb{N}$, per il Teorema di Lagrange per ogni $x \in [0, 1]$ esiste $\xi \in [x_0, x]$ tale che

$$f_n(x) - f_m(x) = f_n(x_0) - f_m(x_0) + \big(f_n'(\xi) - f_m'(\xi)\big)(x - x_0).$$

Dunque, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n, m \geq \bar{n}$ si ha

$$\|f_n - f_m\|_\infty \leq |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + \|f_n' - f_m'\|_\infty.$$

In conclusione, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente su $[0, 1]$ ad una funzione $f \in C([0, 1])$.

Sia ora $\bar{x} \in [0, 1]$ un punto generico, e definiamo le funzioni $g_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(\bar{x})}{x - \bar{x}} & \text{se } x \neq \bar{x} \\ f_n'(\bar{x}) & \text{se } x = \bar{x}. \end{cases}$$

Per la derivabilità di ciascuna f_n, le funzioni g_n sono continue.

Proviamo che la successione $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è uniformemente di Cauchy. Per $x \neq \bar{x}$ abbiamo

$$g_n(x) - g_m(x) = \frac{f_n(x) - f_n(\bar{x}) - (f_m(x) - f_m(\bar{x}))}{x - \bar{x}} = \frac{h(x) - h(\bar{x})}{x - \bar{x}},$$

dove abbiamo posto $h = f_n - f_m$, che è continua su $[0, 1]$ e derivabile per $x \neq \bar{x}$. Per il Teorema di Lagrange esiste $\xi \in [x, \bar{x}]$ tale che $h(x) - h(\bar{x}) = h'(\xi)(x - \bar{x})$, e dunque

$$g_n(x) - g_m(x) = h'(\xi) = f_n'(\xi) - f_m'(\xi).$$

Si deduce che $\|g_n - g_m\|_\infty \leq \|f_n' - f_m'\|_\infty$ e dunque $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è uniformemente di Cauchy dal momento che lo è $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$. La conclusione è che la successione $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente.

Proviamo che f è derivabile e che $f' = g$. Per il Teorema sullo scambio dei limiti si ha
$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to\bar x}\frac{f_n(x)-f_n(\bar x)}{x-\bar x}=\lim_{x\to\bar x}\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(x)-f_n(\bar x)}{x-\bar x},$$
e dunque
$$\begin{aligned}g(\bar x)=\lim_{n\to\infty}f_n'(\bar x)&=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to\bar x}\frac{f_n(x)-f_n(\bar x)}{x-\bar x}\\&=\lim_{x\to\bar x}\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(x)-f_n(\bar x)}{x-\bar x}=\lim_{x\to\bar x}\frac{f(x)-f(\bar x)}{x-\bar x}=f'(\bar x).\end{aligned}$$
□

Riassumiamo il Teorema 4.21 nel seguente corollario.

Corollario 4.22 (Scambio di derivata e limite). Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni derivabili su $[0,1]$. Supponiamo che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converga puntualmente e che $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converga uniformemente. Allora, per ogni $x\in[0,1]$ si ha
$$\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}f_n(x).$$

3.3. Convergenza uniforme e integrale di Riemann. Con la convergenza uniforme è possibile portare il limite sotto segno di integrale. Il Teorema 4.23, tuttavia è di uso limitato. Teoremi di passaggio al limite sotto segno di integrale molto più efficienti sono: 1) il Teorema della convergenza dominata; 2) il Teorema della convergenza monotona (o di Beppo Levi).

Teorema 4.23 (Scambio di limite e integrale). Sia $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, una successione di funzioni Riemann-integrabili e sia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ una funzione. Se $f_n\to f$ uniformemente su $[0,1]$ per $n\to\infty$, allora f è Riemann-integrabile e inoltre
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx. \tag{4.2}$$

Dim. Proviamo preliminarmente che la funzione f è limitata. Infatti, fissato $\varepsilon>0$, per la convergenza uniforme esiste $\bar n\in\mathbb{N}$ tale che per ogni $n\geq\bar n$ si ha
$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon,$$
e dunque per ogni $x\in[0,1]$ si ha
$$|f(x)|\leq|f_n(x)-f(x)|+|f_n(x)|\leq\varepsilon+\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)|.$$
Questo prova la limitatezza di f.

Proviamo ora che f è Riemann-integrabile. Sia $\varepsilon>0$ fissato, e mostriamo che esiste una scomposizione $\sigma=\{0=x_0<x_1<\ldots<x_m=1\}$ dell'intervallo $[0,1]$, per $m\in\mathbb{N}$ opportuno, tale che
$$S(f,\sigma)-s(f,\sigma)\leq\varepsilon,$$
dove
$$S(f,\sigma)=\sum_{i=1}^m|I_i|\sup_{x\in I_i}f(x)\quad\text{e}\quad s(f,\sigma)=\sum_{i=1}^m|I_i|\inf_{x\in I_i}f(x),$$

sono le somme superiori e inferiori di f relativamente a σ, $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ e $|I_i| = x_i - x_{i-1}$.

Sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Si ha allora

$$S(f,\sigma) \leq \sum_{i=1}^{m} |I_i| \sup_{x\in I_i}(f(x) - f_n(x)) + \sum_{i=1}^{m} |I_i| \sup_{x\in I_i} f_n(x) \leq \varepsilon + S(f_n,\sigma),$$

e analogamente

$$s(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{m} |I_i| \inf_{x\in I_i}(f(x) - f_n(x)) + \sum_{i=1}^{m} |I_i| \inf_{x\in I_i} f_n(x) \geq -\varepsilon + s(f_n,\sigma).$$

Sottraendo membro a membro le due disuguaglianze si ottiene

$$S(f,\sigma) - s(f,\sigma) \leq 2\varepsilon + S(f_n,\sigma) - s(f_n,\sigma).$$

Tale maggiorazione vale per una qualsiasi scomposizione σ e per ogni $n \geq \bar{n}$. Fissato un tale n, dal momento che f_n è Riemann-integrabile, possiamo scegliere la scomposizione σ in modo tale che $S(f_n,\sigma) - s(f_n,\sigma) \leq \varepsilon$, e quindi

$$S(f,\sigma) - s(f,\sigma) \leq 3\varepsilon.$$

Questo prova l'integrabilità di f.

Per provare la (4.2) è sufficiente osservare che fissato $\varepsilon > 0$ per $n \geq \bar{n}$ si ha

$$\left| \int_0^1 f_n(x)dx - \int_0^1 f(x)dx \right| = \left| \int_0^1 (f_n(x) - f(x))dx \right| \leq \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|dx \leq \varepsilon.$$

□

4. Topologia di uno spazio metrico

In questa sezione definiamo la topologia di uno spazio metrico, cioè la famiglia degli insiemi aperti. Definiremo anche gli insiemi chiusi, l'interno, la chiusura e la frontiera di un insieme. La topologia è importante perchè è strettamente legata alla nozione di funzione continua.

Nel seguito (X,d) è un insieme con una funzione distanza (spazio metrico) e $B_r(x)$ indica la palla di centro $x \in X$ e raggio $r > 0$. Il caso di nostro interesse è $X = \mathbb{R}^n$ con la distanza Euclidea.

Definizione 4.24 (Insiemi aperti e chiusi). Sia (X,d) uno spazio metrico.

i) Un insieme $A \subset X$ si dice *aperto* se per ogni $x \in A$ esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset A$.
ii) Un insieme $C \subset X$ si dice *chiuso* se $X \setminus C$ è aperto.

Esempio 4.25. Ecco alcune facili considerazioni.

1) Gli insiemi $\emptyset, X$ sono contemporaneamente aperti e chiusi.
2) In $X = \mathbb{R}$ con la distanza $d(x,y) = |x-y|$ valgono i seguenti fatti:
   i) Gli intervalli (a,b) con $-\infty \leq a, b \leq \infty$ sono aperti.
   ii) Gli intervalli $[a,b]$ con $-\infty < a < b < \infty$ sono chiusi.
   iii) Gli intervalli $[a,\infty)$ e $(-\infty,b]$ con $-\infty < a, b < \infty$ sono chiusi.
   iv) Gli intervalli $(a,b]$ e $[a,b)$ con $-\infty < a, b < \infty$ non sono nè aperti nè chiusi.

3) In $X = \mathbb{R}^2$ con la distanza Euclidea:
   i) Il cerchio $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ è aperto.
   ii) Il cerchio $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1\}$ è chiuso.

PROPOSIZIONE 4.26. In uno spazio metrico (X, d) le palle $B_r(x)$, sono aperte per ogni $x \in X$ ed $r > 0$.

Dim. Sia infatti $y \in B_r(x)$ ovvero $s := d(x, y) < r$. Scegliamo $\varepsilon > 0$ tale che $s + \varepsilon < r$. Se $z \in B_\varepsilon(y)$ allora dalla disuguaglianza triangolare segue che

$$d(z, x) \le d(z, y) + d(y, x) < \varepsilon + s < r$$

e quindi $B_\varepsilon(y) \subset B_r(x)$. □

DEFINIZIONE 4.27 (Interno, chiusura, frontiera). Sia $A \subset X$ un insieme.

i) Un punto $x \in X$ si dice *punto interno di* A se esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \subset A$.
ii) L'*interno di* A è l'insieme
$$\mathrm{int}(A) = A^\circ = \big\{x \in X : x \text{ è un punto interno di } A\big\}.$$
iii) Un punto $x \in X$ si dice *punto di chiusura di* A se per ogni $\varepsilon > 0$ risulta $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$.
iv) La *chiusura di* A è l'insieme
$$\overline{A} = \big\{x \in X : x \text{ è un punto di chiusura di } A\ \big\}.$$
v) La *frontiera di* A è l'insieme
$$\partial A = \big\{x \in X : B_r(x) \cap A \neq \emptyset \text{ e } B_r(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \text{ per ogni } r > 0\big\}.$$
In altri termini, $\partial A = \overline{A} \cap (\overline{X \setminus A})$.

Risulta sempre $A^\circ \subset A \subset \overline{A}$ e $\partial A \subset \overline{A}$.

ESEMPIO 4.28. In $\mathbb{R}^2$ con la distanza Euclidea consideriamo il cerchio aperto $A = \big\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\big\}$. Allora:

i) $A = A^\circ$, infatti A è aperto.
ii) La chiusura di A è il cerchio chiuso $\overline{A} = \big\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1\big\}$.
iii) La frontiera di A è la circonferenza-bordo $\partial A = \big\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\big\}$.

La chiusura di un insieme può essere caratterizzata in modo sequenziale (per successioni).

PROPOSIZIONE 4.29. Siano $A \subset X$ un insieme e $x \in X$. Sono equivalenti:

A) $x \in \overline{A}$;
B) Esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \to x$ per $n \to \infty$.

Dim. A)⇒B) Se $x \in \overline{A}$ allora per ogni $r > 0$ risulta $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$. In particolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in A \cap B_{1/n}(x)$. La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è contenuta in A e converge ad x in quanto $d(x_n, x) < 1/n$.

B) ⇒ A) Proviamo che la negazione di A) implica la negazione di B). Se $x \notin \overline{A}$ allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$ e quindi non può esistere una successione contenuta in A convergente a x. □

Teorema 4.30. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $A \subset X$. Allora:

i) A è aperto se e solo se $A = A^\circ$;
ii) A è chiuso se e solo se $A = \overline{A}$.

Dim. La prova di i) è lasciata come esercizio. Proviamo ii).

Se A è chiuso allora $X \setminus A$ è aperto. È sufficiente provare che $\overline{A} \subset A$, perchè l'inclusione $A \subset \overline{A}$ è sempre verificata. Sia $x \in \overline{A}$. Se per assurdo fosse $x \in X \setminus A$ allora esisterebbe $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$ e quindi $x \notin \overline{A}$, assurdo. Dunque deve essere $x \in A$.

Supponiamo ora che sia $A = \overline{A}$ e proviamo che A è chiuso, ovvero che il complementare $X \setminus A = X \setminus \overline{A}$ è aperto. Sia $x \in X \setminus \overline{A}$ un punto che non è di chiusura per A. Allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$. Ma allora $B_\varepsilon(x) \subset X \setminus A$, che dunque è aperto.

□

La topologia di X è il sottoinsieme di $\mathscr{P}(X)$, le parti di X, che contiene esattamente gli insiemi aperti di X.

Definizione 4.31. Sia (X, d) uno spazio metrico. La famiglia di insiemi

$$\tau(X) = \big\{A \subset X : A \text{ è aperto in } X\big\} \subset \mathscr{P}(X)$$

si dice *topologia* di X.

Teorema 4.32. La topologia di uno spazio metrico X verifica le seguenti proprietà:

(A1) $\emptyset, X \in \tau(X)$;
(A2) Se $A_1, A_2 \in \tau(X)$ allora $A_1 \cap A_2 \in \tau(X)$;
(A3) Per ogni famiglia di indici $\mathscr{A}$ risulta

$$A_\alpha \in \tau(X) \text{ per ogni } \alpha \in \mathscr{A} \;\Rightarrow\; \bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} A_\alpha \in \tau(X).$$

La verifica di questo teorema è elementare ed è omessa. In particolare, la proprietà (A2) si estende ad intersezioni *finite* di aperti. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale:

$$A_1, \dots, A_n \in \tau(X) \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \tau(X).$$

La proprietà (A2), tuttavia, non si estende ad intersezioni *numerabili* di aperti. Infatti, l'insieme

$$\big\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le 1\big\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1 + \frac{1}{n}\Big\}$$

non è aperto pur essendo intersezione numerabile di aperti.

Osservazione 4.33. In modo duale, la famiglia dei chiusi di uno spazio metrico verifica le seguenti proprietà:

(C1) $\emptyset, X$ sono chiusi;
(C2) Se C_1, C_2 sono chiusi allora $C_1 \cup C_2$ è chiuso;
(C3) Per ogni famiglia di indici $\mathscr{A}$ risulta

$$C_\alpha \text{ è chiuso per ogni } \alpha \in \mathscr{A} \;\Rightarrow\; \bigcap_{\alpha \in \mathscr{A}} C_\alpha \text{ è chiuso.}$$

In generale, l'unione numerabile di chiusi non è un insieme chiuso.

Teorema 4.34 (Caratterizzazione topologica della continuità). Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sia $f : X \to Y$ una funzione. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1) f è continua;
2) $f^{-1}(A) \subset X$ è aperto in X per ogni aperto $A \subset Y$;
3) $f^{-1}(C) \subset X$ è chiuso in X per ogni chiuso $C \subset Y$.

Dim. Proviamo l'implicazione 1)⇒2). Verifichiamo che ogni punto $x_0 \in f^{-1}(A)$ è un punto interno di $f^{-1}(A)$. Siccome A è aperto e $f(x_0) \in A$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_Y(f(x_0), \varepsilon) \subset A$. Per la continuità di f esiste $\delta > 0$ tale che $d_X(x, x_0) < \delta$ implica $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. In altre parole, si ha $f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon)$. Ma allora si conclude che

$$B_X(x_0, \delta) \subset f^{-1}(f(B_X(x_0, \delta)) \subset f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon)) \subset f^{-1}(A).$$

Notare che l'inclusione a sinistra in generale non è un'uguaglianza.

Proviamo l'implicazione 2)⇒1). Controlliamo che f è continua in un generico punto $x_0 \in X$. Fissato $\varepsilon > 0$, l'insieme $B_Y(f(x_0), \varepsilon))$ è aperto e quindi l'antimmagine $f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon))$ è aperta. Siccome $x_0 \in f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon))$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$B_X(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon)),$$

da cui, passando alle immagini, segue che

$$f(B_X(x_0, \delta)) \subset f(f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon))) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon).$$

Notare che l'ultima inclusione in generale non è un'uguaglianza. La catena di inclusioni provata mostra che se $d_X(x, x_0) < \delta$ allora $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, che è la continuità di f in x_0.

Per provare l'equivalenza 2)⇔3) si usa la seguente relazione insiemistica valida per ogni $B \subset Y$:

$$X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B).$$

Verifichiamo ad esempio 2)⇒3). Sia $C \subset Y$ chiuso. Allora $A = Y \setminus C$ è aperto e quindi $f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$ è aperto. Ovvero, $f^{-1}(C)$ è chiuso. □

Osservazione 4.35. Nella dimostrazione precedente abbiamo usato le seguenti relazioni insiemistiche, per una funzione $f : X \to Y$:

i) $A \subset f^{-1}(f(A))$ per ogni insieme $A \subset X$;
ii) $f(f^{-1}(B)) \subset B$ per ogni insieme $B \subset Y$.

Teorema 4.36. Siano (X, d_X), (Y, d_Y) e (Z, d_Z) spazi metrici e siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ funzioni continue. Allora la composizione $g \circ f : X \to Z$ è continua.

Dim. Usiamo la caratterizzazione 2) di continuità nel Teorema precedente. Se $A \subset Z$ è un aperto allora $g^{-1}(A) \subset Y$ è un aperto, e dunque $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A)) \subset X$ è un aperto. □

5. Spazi metrici compatti. Teorema di Weierstrass

Gli insiemi compatti di uno spazio metrico sono di importanza fondamentale, in quanto le funzioni continue su un compatto assumono valore massimo e valore minimo. Nel seguito (X, d) è uno spazio metrico.

DEFINIZIONE 4.37 (Insieme compatto). Un insieme $K \subset X$ si dice *(sequenzialmente) compatto* se ogni successione di punti $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K ha una sottosuccessione che converge ad un elemento di K.

Questa è la definizione di “compattezza sequenziale”. Gli insiemi compatti sono automaticamente chiusi e limitati.

DEFINIZIONE 4.38 (Insieme limitato). Un insieme K nello spazio metrico (X, d) si dice *limitato* se esiste un punto (equivalentemente: per ogni punto) $x_0 \in X$ ed esiste $R > 0$ tale che $K \subset B(x_0, R)$.

PROPOSIZIONE 4.39. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $K \subset X$ un sottoinsieme compatto. Allora K è chiuso e limitato.

Dim. Proviamo che $K = \overline{K}$. Per ogni $x \in \overline{K}$ esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K che converge ad x. Questa successione ha una sottosuccessione $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ che converge ad un elemento di K. Ma questo elemento deve essere x, che quindi appartiene a K.

Supponiamo per assurdo che K non sia limitato. Allora esiste un punto $x_0 \in X$ tale che $K\cap(X\setminus B(x_0, R) \neq \emptyset$ per ogni $R > 0$. In particolare, con la scelta $R = n \in \mathbb{N}$ esistono punti $x_n \in K$ tali che $d(x_n, x_0) \geq n$. La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è in K. Quindi esiste una sottosuccessione $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ convergente ad un elemento $x \in K$. Ma allora

$$d(x, x_0) \geq d(x_0, x_{n_j}) - d(x_{n_j}, x) \geq n_j - d(x_{n_j}, x) \to \infty$$

per $j \to \infty$. Questo è assurdo perchè $d(x, x_0) < \infty$. □

ESEMPIO 4.40. Sia $X = C([0, 1])$ con la distanza indotta dalla norma $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. L'insieme

$$K = \{f \in X : \|f\|_\infty \leq 1\}$$

è chiuso. Infatti se una successione di funzioni continue $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tali che $|f_n(x)| \leq 1$ per ogni $x \in [0, 1]$ converge uniformemente ad una funzione f, allora anche f è continua e inoltre $|f(x)| \leq 1$ per ogni $x \in [0, 1]$. Dunque $f \in K$. L'insieme K è anche limitato. Infatti è una palla chiusa centrata nella funzione nulla.

L'insieme K tuttavia non è compatto. Infatti, la successione di funzioni $f_n : [0, 1] \to [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1/2] \\ n(x - 1/2) & x \in [1/2, 1/2 + 1/n] \\ 1 & x \in [1/2 + 1/n, 1]. \end{cases}$$

è in K, ma non ha alcuna sottosuccessione che converge uniformemente. Se tale sottosuccessione esistesse, dovrebbe convergere al limite puntuale della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, che è una funzione discontinua. □

TEOREMA 4.41 (Heine-Borel). Sia $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, munito della distanza Euclidea e sia $K \subset \mathbb{R}^m$ un insieme. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

(A) K è compatto;
(B) K è chiuso e limitato.

Dim. Proviamo l'affermazione non banale (B)$\Rightarrow$(A). Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di punti in K. Scriviamo le coordinate $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^m)$. La successione reale $(x_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata e dunque ha una sottosuccesione $(x_{n_j}^1)_{j\in\mathbb{N}}$ convergente ad un numero $x^1 \in \mathbb{R}$. La successione $(x_{n_j}^2)_{j\in\mathbb{N}}$ è limitata e quindi ha una sottosuccessione convergente ad un numero $x^2 \in \mathbb{R}$. Si ripete tale procedimento di sottoselezione m volte. Dopo m sottoselezioni successive si trova una scelta di indici $j \mapsto k_j$ tale che ciascuna successione di coordinate $(x_{k_j}^i)_{j\in\mathbb{N}}$ converge ad un numero $x^i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$. Ma allora $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ converge a $x = (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m$. Siccome K è chiuso, deve essere $x \in K$. □

Teorema 4.42. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e sia $f : X \to Y$ continua. Se X è compatto allora $f(X) \subset Y$ è compatto in Y.

Dim. Sia $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $f(X)$. Esistono punti $x_n \in X$ tali che $f(x_n) = y_n$, $n \in \mathbb{N}$. La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha una sottosuccessione $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ che converge ad un punto $x_0 \in X$. Siccome f è continua si ha

$$\lim_{j\to\infty} f(x_{n_j}) = f(x_0).$$

In altri termini, $y_{n_j} \to f(x_0) \in f(X)$ per $j \to \infty$. □

Corollario 4.43 (Weierstrass). Sia (X, d) uno spazio metrico compatto e sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esistono $x_0, x_1 \in X$ tali che

$$f(x_0) = \max_{x\in X} f(x) \quad \text{e} \quad f(x_1) = \min_{x\in X} f(x).$$

Dim. Infatti $f(X) \subset \mathbb{R}$ è compatto, e quindi chiuso e limitato. Dunque l'insieme $f(X)$ ha elemento minimo ed elemento massimo. □

Il prossimo teorema, noto come Teorema di Dini, dà condizioni sufficienti per avere la convergenza uniforme a partire da quella puntuale.

Teorema 4.44 (Dini). Sia K uno spazio metrico compatto, e siano $f, f_n : K \to \mathbb{R}$ funzioni continue, $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che:
i) $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ per ogni $x \in K$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$;
ii) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ per ogni $x \in K$.

Allora, la convergenza in ii) è uniforme su K.

Dim. Supponiamo per assurdo che esista $\varepsilon > 0$ tale che $\|f_n - f\|_\infty > \varepsilon$ per infiniti $n \in \mathbb{N}$. Dunque esiste una selezione crescente di indici $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ed esistono punti $x_{n_k} \in K$ tali che

$$f(x_{n_k}) - f_{n_k}(x_{n_k}) > \varepsilon, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Siccome K è compatto, si può assumere senza perdere di generalità che esista $x_0 \in K$ tale che $x_{n_k} \to x_0 \in K$ per $k \to \infty$. Altrimenti, si estrae un'ulteriore sottosuccessione e ci si riconduce a questo caso.

Sia ora $m \in \mathbb{N}$ e sia $n_k \ge m$. Per la monotonia i) avremo $f_m(x_{n_k}) \le f_{n_k}(x_{n_k})$, e dunque

$$f(x_{n_k}) - f_m(x_{n_k}) \ge f(x_{n_k}) - f_{n_k}(x_{n_k}) > \varepsilon, \quad \text{se } m \le n_k.$$

Facendo tendere $k \to \infty$ e usando $x_{n_k} \to x_0$ insieme alla continuità di f ed f_m, si ottiene la disuguaglianza

$$f(x_0) - f_m(x_0) \geq \varepsilon, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Questo contraddice la ii) nel punto $x = x_0$.

□

6. Spazi metrici completi. Teorema delle contrazioni

Uno spazio metrico è completo quando tutte le successioni di Cauchy sono convergenti. Negli spazi metrici completi vale il Teorema delle contrazioni

Definizione 4.45 (Successione di Cauchy). Una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in uno spazio metrico (X, d) si dice *di Cauchy* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \text{per ogni } m, n \geq \bar{n}.$$

Tutte le successioni convergenti sono di Cauchy, infatti se $x_n \to x$ allora per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon$$

pur di scegliere $m, n \geq \bar{n}$ con $\bar{n} \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande. Gli spazi metrici in cui tutte le successioni di Cauchy sono convergenti hanno propretà speciali.

Definizione 4.46 (Spazio metrico completo). Uno spazio metrico (X, d) si dice *completo* se ogni successione di Cauchy in (X, d) è convergente ad un elemento di X.

Se lo spazio metrico completo nasce come spazio normato, allora lo si chiama spazio di Banach.

Definizione 4.47 (Spazio di Banach). Uno spazio di Banach (reale) è uno spazio normato (reale) $(V, \|\cdot\|)$ che è completo rispetto alla metrica indotta dalla norma.

6.1. Esempi di spazi di Banach.

Teorema 4.48. I numeri reali $\mathbb{R}$ con la distanza Euclidea formano uno spazio metrico completo.

Dim. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$. Proviamo preliminarmente che la successione è limitata. Infatti, scelto $\varepsilon = 1$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|x_n - x_m| < 1$ per $m, n \geq \bar{n}$, e in particolare per $n \geq \bar{n}$ si ha

$$|x_n| \leq |x_{\bar{n}}| + |x_n - x_{\bar{n}}| \leq 1 + |x_{\bar{n}}|,$$

e dunque, per $n \in \mathbb{N}$ si ha la maggiorazione

$$|x_n| \leq \max\{|x_1|, \dots, |x_{\bar{n}-1}|, 1 + |x_{\bar{n}}|\}.$$

Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass, dalla successione limitata $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si può estrarre una sottosuccessione convergente $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$. Ovvero esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $x_{n_j} \to x$ per $j \to \infty$.

Proviamo che $x_n \to x$ per $n \to \infty$. Fissato $\varepsilon > 0$ sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ data dalla condizione di Cauchy e scegliamo $j \in \mathbb{N}$ tale che $n_j \geq \bar{n}$ e $|x - x_{n_j}| < \varepsilon$. Allora per $n \geq \bar{n}$ risulta

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_j}| + |x_{n_j} - x| \leq 2\varepsilon.$$

Questo termina la dimostrazione. □

ESEMPIO 4.49. I numeri razionali $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ con la distanza Euclidea $d(x,y) = |x-y|$, $x, y \in \mathbb{Q}$, non sono uno spazio metrico completo. Infatti la successione

$$x_n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \in \mathbb{Q}, \quad n \in \mathbb{N},$$

è di Cauchy, in quanto converge (in $\mathbb{R}$) al numero $\mathrm{e} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ma il limite non è in $\mathbb{Q}$.

ESEMPIO 4.50. Lo spazio k-dimensionale $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$, con la norma Euclidea è uno spazio di Banach. Infatti, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}^k$, allora indicando con x_n^i la coordinata i-esima di x_n, $i = 1, \dots, k$, la successione $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ a valori reali è di Cauchy in $\mathbb{R}$ e dunque converge $x_n^i \to x^i \in \mathbb{R}$. Posto $x = (x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^k$, da questo segue che $x_n \to x$ in $\mathbb{R}^k$:

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x| = \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{i=1}^k (x_n^i - x^i)^2 \Big)^{1/2} = 0.$$

ESEMPIO 4.51. Lo spazio $X = C([0,1])$ con la distanza data dalla norma integrale

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

non è completo. Per $n \in \mathbb{N}$ sia $f_n \in C([0,1])$ la funzione così definita

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1/2] \\ n(x-1/2) & x \in [1/2, 1/2 + 1/n] \\ 1 & x \in [1/2 + 1/n, 1]. \end{cases}$$

La successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy. Infatti, dati $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \geq n$ risulta

$$d(f_m, f_n) = \int_0^1 |f_n - f_m| dx \leq \int_{1/2}^{1/2+1/n} (|f_n| + |f_m|) dx \leq \frac{2}{n}.$$

La candidata funzione limite è la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1/2] \\ 1 & x \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

In effetti, la funzione f è Riemann-integrabile su $[0,1]$ e risulta

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx = 0,$$

ma f non è in $C([0,1])$ perchè ha un punto di discontinuità. Dunque la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non converge ad un elemento di $X = C([0,1])$.

TEOREMA 4.52. Lo spazio $X = C([0,1]; \mathbb{R}^k)$, $k \geq 1$, con la norma della convergenza uniforme:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

è uno spazio di Banach.

Dim. Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in X. Per ogni $x \in [0,1]$ fissato, la successione $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}^k$ e quindi è convergente. Esiste un punto che chiamiamo $f(x) \in \mathbb{R}^k$ tale che $f_n(x) \to f(x)$ per $n \to \infty$. Risulta definita una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}^k$. Proviamo che:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ fissato, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $x \in [0,1]$ vale

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \text{per } m, n \geq \bar{n}.$$

Facendo tendere $m \to \infty$ e usando la convergenza $f_m(x) \to f(x)$ per $m \to \infty$ si ottiene per ogni $x \in [0,1]$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{per } m, n \geq \bar{n}.$$

Questo prova l'affermazione.

Rimane da provare che $f \in X$, ovvero che $f : [0,1] \to \mathbb{R}^k$ è continua. Verifichiamo la continuità in un generico punto $x_0 \in [0,1]$. Fissato $\varepsilon > 0$ scegliamo un $n \geq \bar{n}$ a nostro piacere. Siccome la funzione f_n è continua in x_0, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in [0,1]$ si ha

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon.$$

Dunque, per $|x - x_0| < \delta$ si ottiene

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq 3\varepsilon.$$

Questo prova la continuità di f. □

6.2. Teorema delle contrazioni di Banach. Sia X un insieme e sia $T : X \to X$ una funzione da X in se stesso. Siamo interessati all'esistenza di soluzioni $x \in X$ dell'equazione $T(x) = x$. Un simile elemento $x \in X$ si dice *punto fisso* di T.

Definizione 4.53 (Contrazione). Sia (X, d) uno spazio metrico. Un'applicazione (funzione) $T : X \to X$ è una *contrazione* se esiste un numero $0 < \lambda < 1$ tale che $d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y)$ per ogni $x, y \in X$.

Teorema 4.54 (Banach). Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $T : X \to X$ una contrazione. Allora esiste un unico punto $x \in X$ tale che $x = T(x)$.

Dim. Sia $x_0 \in X$ un qualsiasi punto e si definisca la successione $x_n = T^n(x_0) = T \circ \ldots \circ T(x_0)$, n-volte. Proviamo che la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy. Infatti, per la disuguaglianza triangolare si ha per ogni $n, k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leq \sum_{h=1}^{k} d(x_{n+h}, x_{n+h-1}) = \sum_{h=1}^{k} d(T^{n+h}(x_0), T^{n+h-1}(x_0)) \\ &\leq d(T(x_0), x_0) \sum_{h=1}^{k} \lambda^{n+h-1} \leq \lambda^n d(T(x_0), x_0) \sum_{h=1}^{\infty} \lambda^{h-1}. \end{aligned}$$

La serie converge e $\lambda^n \to 0$ per $n \to \infty$, dal momento che $\lambda < 1$. Poichè X è completo, esiste un punto $x \in X$ tale che $x = \lim_{n\to\infty} T^n(x_0)$.

Proviamo che $x = T(x)$. La funzione $T : X \to X$ è continua e quindi abbiamo

$$x = \lim_{n\to\infty} T^n(x_0) = \lim_{n\to\infty} T(T^{n-1}(x_0)) = T(\lim_{n\to\infty} T^{n-1}(x_0)) = T(x).$$

Proviamo infine che il punto fisso è unico. Sia $\bar{x} \in X$ un altro punto tale che $\bar{x} = T(\bar{x})$. Allora abbiamo

$$d(x, \bar{x}) = d(T(x), T(\bar{x})) \leq \lambda d(x, \bar{x}) \quad \Rightarrow \quad d(x, \bar{x}) = 0,$$

perchè $\lambda < 1$, e quindi $x = \bar{x}$. □

7. Insiemi connessi

DEFINIZIONE 4.55 (Spazio connesso). Uno spazio metrico (X, d) si dice connesso se $X = A_1 \cup A_2$ con A_1, A_2 aperti tali che $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ implica che $A_1 = \emptyset$ oppure $A_2 = \emptyset$.

Se X non è connesso allora esistono due insiemi aperti disgiunti e non-vuoti A_1 e A_2 tali che $X = A_1 \cup A_2$. Quindi $A_1 = X \setminus A_2$ e $A_2 = X \setminus A_1$ sono contemporaneamente aperti e chiusi. Se X è connesso $\emptyset$ e X sono gli unici insiemi ad essere sia aperti che chiusi.

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $Y \subset X$ un suo sottoinsieme. Allora (Y, d) è ancora uno spazio metrico che avrà la sua topologia $\tau(Y)$, che si dice *topologia indotta* da X su Y o *topologia relativa*.

ESERCIZIO 1. Sia $Y \subset X$ con la topologia relativa. Provare che un insieme $A \subset Y$ è aperto in Y se e solo se esiste un insieme aperto $B \subset X$ tale che $A = Y \cap B$.

ESEMPIO 4.56. Sia $X = \mathbb{R}$ e $Y = [0, 1]$. L'insieme $[0, 1/2) \subset [0, 1]$ è relativamente aperto in $[0, 1]$ in quanto $[0, 1/2) = [0, 1] \cap (-\infty, 1/2)$.

DEFINIZIONE 4.57. Sia (X, d) uno spazio metrico. Un sottoinsieme $Y \subset X$ si dice *connesso* se è connesso rispetto alla topologia indotta. Precisamente, se $Y = (Y \cap A_1) \cup (Y \cap A_2)$ con A_1, A_2 aperti di X e unione disgiunta, allora $Y \cap A_1 = \emptyset$ oppure $Y \cap A_2 = \emptyset$.

ESEMPIO 4.58. Sia $\mathbb{R}$ munito della distanza Euclidea.

1) L'insieme $A \subset \mathbb{R}$, $A = [-2, -1] \cup [1, 2]$ non è connesso in $\mathbb{R}$. Infatti la seguente unione è disgiunta:

$$A = (A \cap (-3, 0)) \cup (A \cap (0, 3)).$$

2) L'intervallo $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ è connesso. Proviamo questo fatto. Siano A_1, A_2 aperti di $\mathbb{R}$ tali che:

$$I = (I \cap A_1) \cup (I \cap A_2).$$

con unione disgiunta. Supponiamo ad esempio che $0 \in A_1$. Definiamo

$$\bar{x} = \sup \big\{x \in [0, 1] : [0, x) \subset I \cap A_1\big\}.$$

Deve essere $0 < \bar{x} \leq 1$. Se fosse $\bar{x} \in A_2$ allora $\bar{x} - \varepsilon \in I \cap A_2$ per qualche $\varepsilon > 0$ ma allora $I \cap A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Questo non è possibile. Quindi $\bar{x} \in I \cap A_1$.

Se $\bar{x} < 1$ allora esiste $\delta > 0$ tale che $\bar{x} + \varepsilon \in A_1 \cap I$ per ogni $0 < \varepsilon < \delta$. Dunque $[\bar{x}, \delta) \subset A_1$ e questo contraddice la definizione di $\bar{x}$. Quindi $\bar{x} = 1$ e dunque $I \subset A_1$ e quindi $I \cap A_2 = \emptyset$. Altrimenti $(I \cap A_1) \cap (I \cap A_2) \neq \emptyset$.

TEOREMA 4.59. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sia $f : X \to Y$ continua. Se X è connesso allora $f(X) \subset Y$ è connesso.

Dim. Siano $A_1, A_2 \subset Y$ insiemi aperti tali che

$$f(X) = (f(X) \cap A_1) \cup (f(X) \cap A_2)$$

con unione disgiunta. Allora

$$\begin{aligned}X &= f^{-1}(f(X)) = f^{-1}((f(X)\cap A_1)\cup(f(X)\cap A_2))\\ &= f^{-1}(f(X)\cap A_1)\cup f^{-1}(f(X)\cap A_2))\\ &= (X\cap f^{-1}(A_1))\cup(X\cap f^{-1}(A_2)) = f^{-1}(A_1)\cup f^{-1}(A_2).\end{aligned}$$

L'ultima unione è disgiunta e gli insiemi $f^{-1}(A_1)$, $f^{-1}(A_2)$ sono aperti. Siccome X è connesso deve essere $f^{-1}(A_1)=\emptyset$ oppure $f^{-1}(A_2)=\emptyset$. Dunque, si ha $f(X)\cap A_1=\emptyset$ oppure $f(X)\cap A_2=\emptyset$. □

Definizione 4.60 (Spazio connesso per archi). Uno spazio metrico (X,d) si dice *connesso per archi* se per ogni coppia di punti $x,y\in X$ esiste una curva continua $\gamma:[0,1]\to X$ tale che $\gamma(0)=x$ e $\gamma(1)=y$.

Teorema 4.61. Se uno spazio metrico (X,d) è connesso per archi allora è connesso.

Dim. Supponiamo per assurdo che X non sia connesso. Allora esistono due aperti A_1,A_2 disgiunti e non vuoti tali che $X=A_1\cup A_2$. Siano $x\in A_1$ e $y\in A_2$, e sia $\gamma:[0,1]\to X$ una curva continua tale che $\gamma(0)=x$ e $\gamma(1)=y$. Ma allora

$$[0,1]=([0,1]\cap\gamma^{-1}(A_1))\cup([0,1]\cap\gamma^{-1}(A_2))$$

con unione disgiunta e $\gamma^{-1}(A_1))$ e $\gamma^{-1}(A_2)$ aperti non vuoti in $[0,1]$. Questo è assurdo. □

Esercizio 2. Si consideri il seguente sottoinsieme del piano:

$$A=\big\{(x,\sin(1/x))\in\mathbb{R}^2 : x\in(0,1]\big\}\cup\big\{(0,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in[-1,1]\big\}$$

con la topologia indotta dal piano. Provare che A è connesso ma non è connesso per archi.

Esempio 4.62.

1) $\mathbb{R}^n$ è connesso per ogni $n\geq 1$.
2) $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ è connesso per $n\geq 2$ ma non è connesso per $n=1$.
3) $\mathbb{R}^n\setminus\{x\in\mathbb{R}^n : x_n=0\}$ non è connesso, $n\geq 1$.
4) $\mathbb{R}^n\setminus\{x\in\mathbb{R}^n : |x|=1\}$ non è connesso, $n\geq 1$.

Teorema 4.63. Sia $A\subset\mathbb{R}^n$ un aperto connesso (non vuoto). Allora A è connesso per archi.

Dim. Dimostreremo un'affermazione più precisa: A è connesso per curve poligonali. Sia $x_0\in A$ un punto scelto a nostro piacere. Definiamo il seguente insieme

$$A_1=\big\{x\in A : x \text{ si connette a } x_0 \text{ con una curva poligonale contenuta in } A\big\}.$$

Proviamo che A_1 è aperto. Infatti, se $x\in A_1\subset A$ allora esiste $\varepsilon>0$ tale che $B_\varepsilon(x)\subset A$, in quanto A è aperto. Ogni punto di $y\in B_\varepsilon(x)$ si collega al centro x con un segmento contenuto in A. Dunque y si collega a x_0 con una curva poligonale contenuta in A, ovvero $B_\varepsilon(x)\subset A_1$.

Sia $A_2=A\setminus A_1$. Proviamo che anche A_2 è aperto. Se $x\in A_2\subset A$ allora esiste $\varepsilon>0$ tale che $B_\varepsilon(x)\subset A$. Affermiamo che $B_\varepsilon(x)\subset A_2$. Se così non fosse troveremmo

$y \in B_\varepsilon(x) \cap A_1$. Il punto x_0 si collega a y con una curva poligonale in A ed y si collega ad x con un segmento contenuto in A. Quindi $x \in A_1$, che non è possibile. Questo argomento prova che A_2 è aperto. Allora abbiamo

$$X = A_1 \cup A_2$$

con A_1 e A_2 aperti ed unione disgiunta. Siccome X è connesso, uno degli aperti deve essere vuoto. Siccome $A_1 \neq \emptyset$ allora $A_2 = \emptyset$. Questo termina la dimostrazione. □

Teorema 4.64 (Valori intermedi). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora per ogni $t \in (\inf_A f, \sup_A f)$ esiste un punto $x \in A$ tale che $f(x) = t$.

Dim. Siano $x_0, x_1 \in A$ tali che $f(x_0) < t < f(x_1)$. Sia $\gamma : [0,1] \to A$ una curva continua tale che $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$. La composizione $\varphi(s) = f(\gamma(s))$, $s \in [0,1]$, è continua. Per il Teorema dei valori intermedi in una dimensione esiste $s \in (0,1)$ tale che $\varphi(s) = t$. Il punto $x = \gamma(s) \in A$ verifica la tesi del teorema. □

8. Esercizi con soluzione

8.1. Definizione di spazio metrico.

Esercizio 4.1. Sia $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la seguente funzione:

$$d(x,y) = \log(1 + |x-y|), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Provare che $(\mathbb{R}, d)$ è uno spazio metrico.

Soluzione. Verifichiamo gli assiomi della funzione distanza.
(A1) Chiaramente $\log(1 + |x-y|) \geq \log 1 = 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ e inoltre si ha

$$\log(1 + |x-y|) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + |x-y| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = y.$$

(A2) La funzione è simmetrica $\log(1 + |x-y|) = \log(1 + |y-x|)$.

(A3) Per verificare la disuguaglianza triangolare osserviamo preliminarmente che se $s, t \geq 0$ sono numeri reali non negativi, allora vale

$$1 + s + t \leq 1 + s + t + st = (1+s)(1+t)$$

e dunque dalle proprietà della funzione logaritmo segue che

$$\log(1 + s + t) \leq \log\big((1+s)(1+t)\big) = \log(1+s) + \log(1+t).$$

Utilizzando la disuguaglianza precedente si ottiene, per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\log(1 + |x-y|) \leq \log(1 + |x-z| + |z-y|) \leq \log(1 + |x-z|) + \log(1 + |z-y|).$$

□

8.2. Limiti in più variabili.

Esercizio 4.2. Determinare tutti i parametri reali $\alpha, \beta \geq 0$ tali che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sotto definita sia continua nel punto $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla distanza Euclidea:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Per individuare una possibile risposta al quesito studiamo la funzione f ristretta ad una retta nel piano della forma $y = mx$ per qualche $m \in \mathbb{R}$. Precisamente, consideriamo la funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita per $x \neq 0$

$$\varphi(x) = f(x, mx) = \frac{|x|^{\alpha+\beta}|m|^\beta}{x^2 + m^2x^2} = |x|^{\alpha+\beta-2}\frac{|m|^\beta}{1+m^2}.$$

Al limite per $x \to 0$ si ottiene:

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha+\beta > 2, \\ \frac{|m|^\beta}{1+m^2} & \text{se } \alpha+\beta = 2, \\ \infty & \text{se } \alpha+\beta < 2. \end{cases}$$

Da questo fatto deduciamo che per $\alpha + \beta \leq 2$ la funzione f non è continua in $(0,0)$.

Proveremo che per $\alpha+\beta > 2$ la funzione è continua in $(0,0)$ usando la definizione. Partiamo dalla seguente disuguaglianza:

$$\frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2+y^2} \leq (x^2+y^2)^{\alpha/2+\beta/2-1} = |(x,y)|^{\alpha+\beta-2}.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e cerchiamo $\delta > 0$ tale che

$$d_{\mathbb{R}^2}((x,y),(0,0)) = |(x,y)| < \delta \quad \Rightarrow \quad d_{\mathbb{R}}(f(x,y), f(0,0)) = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2+y^2} < \varepsilon.$$

Per la disuguaglianza precedente, una possibile scelta di $\delta > 0$ che garantisce tale implicazione è la seguente:

$$\delta = \varepsilon^{\frac{1}{\alpha+\beta-2}}$$

dove la radice è ben definita per $\alpha + \beta > 2$.

Il precedente esercizio può essere risolto in modo efficiente anche utilizzando le coordinate polari nel piano.

Esercizio 4.3. Stabilire se la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sotto definita è continua nel punto $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla distanza Euclidea:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

L'esame di f lungo il fascio di rette $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$, produce le seguenti informazioni. Chiaramente abbiamo

$$\varphi(x) = f(x, mx) = \frac{x^3 m}{x^4 + m^2x^2} = \frac{xm}{x^2+m^2},$$

e dunque, facendo il limite per $x \to 0$ con $m \in \mathbb{R}$ fissato, si trova:

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) = 0.$$

La restrizione di f ad una qualsiasi retta del fascio è continua nel punto $x = 0$. Questo non permette tuttavia di concludere che f è continua in $(0,0)$.

In effetti, f non è continua in $(0,0)$. Consideriamo infatti la restrizione di f ad una parabola della forma $y = mx^2$:

$$\psi(x) = f(x, mx^2) = \frac{x^4 m}{x^4 + m^2 x^4} = \frac{m}{1+m^2}.$$

Se $m \neq 0$, la funzione ψ è una costante non nulla. Dunque per ogni $m \in \mathbb{R}$ è possibile scegliere successioni di punti $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nel piano tali che $(x_n, y_n) \to (0,0)$ per $n \to \infty$ e

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \frac{m}{1+m^2}.$$

Dunque, f non è continua in $(0,0)$.

8.3. Convergenza uniforme di successioni di funzioni.

Esercizio 4.4. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{n^2 \sin\big(x/n^2\big)}{1 + n^2 x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1) Calcolare il limite puntuale della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2) Provare che si ha $|f_n(x)| \leq \frac{|x|}{1+x^2n^2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
3) Studiare la convergenza uniforme della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soluzione. 1) Se $x = 0$ si ha $f_n(0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dunque il limite è 0. Per $x \neq 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{1+x^2n^2} = \frac{1}{x^2}, \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \sin\big(x/n^2\big) = 0.$$

L'ultima affermazione segue dalla continuità della funzione seno. Dunque $f_n(x) \to 0$ per $n \to \infty$ anche per ogni $x \neq 0$.

2) Si usa la disuguaglianza elementare $|\sin(t)| \leq |t|$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e si ottiene

$$|f_n(x)| \leq \frac{n^2|x/n^2|}{1+n^2x^2} = \frac{|x|}{1+n^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3) Proviamo che la successione di funzioni $g_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ converge a zero uniformemente per $x \geq 0$. La derivata di g_n è

$$g_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}, \quad x \geq 0.$$

Quindi, si ha $g_n'(x) > 0$ per $x \in [0, 1/n)$ e $g_n'(x) < 0$ per $x > 1/n$. Deduciamo che nel punto $x = 1/n$ la funzione g_n assume il valore massimo, che vale

$$g(1/n) = \frac{1}{2n}.$$

Per considerazioni elementari di simmetria, si ha

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x)| = g_n(1/n) = \frac{1}{2n} \to 0$$

per $n \to \infty$. Quindi, la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a 0 su tutto $\mathbb{R}$.

$\square$

Esercizio 4.5. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ così definite:

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\log\left(x^{2n} + n^{2x}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

Quando $-1 \le x \le 1$ si ha

$$-\frac{2\log n}{n} \le \frac{\log n^{2x}}{n} \le \frac{\log(x^{2n} + n^{2x})}{n} \le \frac{\log(1+n^2)}{n},$$

e per confronto si deduce che si ha convergenza puntuale a 0:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \quad -1 \le x \le 1.$$

Di più, si ha la convergenza uniforme:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{-1\le x\le 1} |f_n(x)| = 0.$$

Studiamo la convergenza puntuale per $x^2 > 1$. Riscriviamo la funzione nel seguente modo:

$$f_n(x) = \log x^2 + \frac{1}{n}\log\left(1 + \frac{n^{2x}}{x^{2n}}\right).$$

Siccome

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2x}}{x^{2n}} = 0 \quad \text{per } x^2 > 1,$$

deduciamo che

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \log x^2, \quad x^2 > 1.$$

In definitiva, il limite puntuale è

$$f_\infty(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x^2 \le 1 \\ \log x^2 & \text{per } x^2 > 1. \end{cases}$$

Studiamo la convergenza uniforme per $x < -1$. Consideriamo la differenza

$$g_n(x) = |f_n(x) - f_\infty(x)| = f_n(x) - f_\infty(x) \ge 0.$$

La sua derivata è

$$g_n'(x) = \frac{1}{n}\frac{2nx^{2n-1} + 2n^{2x}\log n}{x^{2n} + n^{2x}} - \frac{2}{x} = \frac{2n^{2x}(x\log n - n)}{nx(x^{2n} + n^{2x})}.$$

Chiaramente, per $x < -1$ si ha $g_n'(x) \ge 0$ e di conseguenza

$$\sup_{x\le -1} |f_n(x) - f_\infty(x)| = f_n(-1) - f_\infty(-1) = f_n(-1) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Si ha dunque convergenza uniforme su $(-\infty, -1]$.

Studiamo la convergenza uniforme su $1 < x \le M$, dove $M > 1$ è arbitrario. Definitivamente (per tutti gli n sufficientemente grandi) si ha $g_n'(x) < 0$ per $1 \le x \le M$ (infatti $x\log n - n \le M\log n - n < 0$ definitivamente). Di conseguenza

$$\sup_{1\le x\le M} |f_n(x) - f_\infty(x)| = f_n(1) - f_\infty(1) = f_n(1) \to 0, \quad n \to \infty.$$

In conclusione, si ha convergenza uniforme su $[1, M]$ per ogni $M > 1$. Non si ha invece convergenza uniforme su $[1, \infty)$, in quanto

$$\lim_{x\to\infty} f_n(x) - f_\infty(x) = \infty$$

per ogni $n \geq 1$.

$\square$

Esercizio 4.6. Si consideri la successione di funzioni $f_n = g_n h_n$, $n \in \mathbb{N}$, dove

$$g_n(x) = \mathrm{arctg}(nx) \quad \text{e} \quad h_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1) Calcolare il limite puntuale

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

2) Studiare la convergenza uniforme delle successioni $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3) Provare che la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente su $\mathbb{R}$.

Soluzione. 1) Osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{arctg}(nx) = \frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(x), \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} = |x|, \quad x \in \mathbb{R},$$

e quindi

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2}x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2) Chiaramente, per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x|\right| = \left|\frac{1/n}{\sqrt{x^2 + 1/n} + |x|}\right| \leq \sqrt{\frac{1}{n}},$$

e quindi c'è la convergenza uniforme

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x|\right| = 0.$$

Inoltre, fissato $\delta > 0$, dalle proprietà elementari di monotonia della funzione arcotangente segue che per ogni $x \geq \delta$ si ha

$$|\mathrm{arctg}(nx) - \pi/2| \leq \pi/2 - \mathrm{arctg}(n\delta),$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\geq\delta} |\mathrm{arctg}(nx) - \pi/2| = 0.$$

Discorso analogo si ha per $x \leq -\delta$. La successione $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non converge uniformemente in alcun intorno di $x = 0$ in quanto il suo limite puntuale è una funzione discontinua in $x = 0$.

3) Intanto osserviamo che, dette g ed h le funzioni limite di $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ed $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, abbiamo

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |g_n(x)h_n(x) - g_n(x)h(x)| + |g_n(x)h(x) - g(x)h(x)|,$$

e dunque fissati $0 < \delta < M < \infty$ si ha

$$\begin{aligned}\sup_{\delta\le x\le M} |f_n(x) - f(x)| &\le \frac{\pi}{2} \sup_{\delta\le x\le M} |h_n(x) - h(x)| + \sup_{\delta\le x\le M} |xg_n(x) - xg(x)| \\ &\le \frac{\pi}{2\sqrt{n}} + M \sup_{\delta\le x\le M} |g_n(x) - g(x)|,\end{aligned}$$

e quindi si ha convergenza uniforme su ogni intervallo $[\delta, M]$, per i fatti stabiliti al punto precedente. La stima del primo pezzo è indipendente da δ ed M.

Per migliorare la stima precedente si può argomentare nel seguente modo. È sufficiente mostrare la convergenza uniforme per $x > 0$. Precisamente, affermiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x>0} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \mathrm{arctg}(nx) - \frac{\pi}{2} x \right| = 0.$$

Dalla proprietà della funzione arcotangente

$$\mathrm{arctg}(t) + \mathrm{arctg}\Big(\frac{1}{t}\Big) = \frac{\pi}{2}, \quad t > 0,$$

si ottiene

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \mathrm{arctg}(nx) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \Big(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\Big(\frac{1}{nx}\Big)\Big).$$

Dal punto 2) sappiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x>0} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - x \right| = 0.$$

D'altra parte, usando $\mathrm{arctg}(t) \le t$ per $t > 0$, si ha per ogni $x > 0$

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \mathrm{arctg}\Big(\frac{1}{nx}\Big) \le \Big(x + \frac{1}{\sqrt{n}}\Big) \mathrm{arctg}\Big(\frac{1}{nx}\Big) \le \frac{1}{n} + \frac{\pi}{2\sqrt{n}},$$

e dunque

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x>0} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \mathrm{arctg}\Big(\frac{1}{nx}\Big) = 0.$$

□

8.4. Topologia.

Esercizio 4.7. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e si considerino i seguenti insiemi in $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > f(x)\} \quad \text{e} \quad C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge f(x)\}.$$

Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni:
1) Se f è continua allora A è aperto.
2) Se A è aperto allora f è continua.
3) Se f è continua allora C è chiuso.
4) Se C è chiuso allora f è continua.

Soluzione. 1) Vero. La funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = f(x) - y$, è continua da $\mathbb{R}^2$ ad $\mathbb{R}$ perchè f è continua. Dunque l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x) < 0\} = F^{-1}\big((-\infty, 0)\big)$$

è aperto essendo antimmagine di un intervallo aperto.

2) Falso. Infatti la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0, \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

non è continua, ma l'insieme $A = \{y > f(x)\}$ è aperto in quanto

$$A = A_1 \cup (A_2 \cap A_3)$$

e $A_1 = \{y > 1\}$, $A_2 = \{y > 0\}$ e $A_3 = \{x > 0\}$ sono sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}^2$. Si veda la figura.

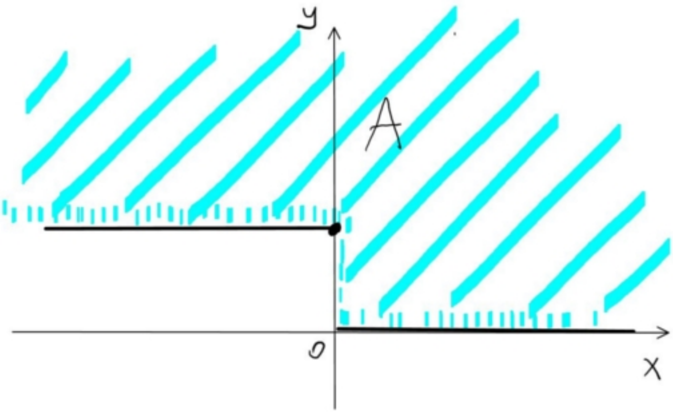

FIGURA 3

3) Vero. Infatti, con le notazioni precedenti si ha

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x) \leq 0\} = F^{-1}\big((-\infty, 0]\big)$$

a dunque C è chiuso essendo l'antimmagine del chiuso $(-\infty, 0]$ rispetto alla funzione continua F.

4) Falso. Infatti la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

non è continua, ma l'insieme $C = \{y \geq f(x)\}$ è chiuso in quanto

$$C = C_1 \cup (C_2 \cap C_3)$$

e $C_1 = \{y \geq 1\}$, $C_2 = \{y \geq 0\}$ e $C_3 = \{x \geq 0\}$ sono sottoinsiemi chiusi di $\mathbb{R}^2$. L'insieme C si ottiene dall'insieme A in figura aggiungendo ad A la sua frontiera, $C = \overline{A}$.

$\square$

ESERCIZIO 4.8. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme

$$A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 + x^2 - y^2 < 1\big\}.$$

i) Provare che A è limitato;
ii) Dire se A è aperto e/o chiuso;
iii) Calcolare A°, $\overline{A}$ e ∂A.

Soluzione. Se $(x, y) \in A$ allora

$$y^2(y^2 - 1) \le x^4 + x^2 + y^2(y^2 - 1) < 1$$

e quindi, posto $t = y^2$, si ottiene $t^2 - t - 1 < 0$ con $t \ge 0$. La soluzione è

$$y^2 = t \le \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Inoltre si ha

$$x^2 \le x^2 + x^4 < 1 + y^2(1 - y^2) \le \frac{5}{4}.$$

In definitiva si ha l'inclusione

$$A \subset \big[-\sqrt{5}/2, \sqrt{5}/2\big] \times [-\sqrt{(1+\sqrt{5})/2}, -\sqrt{(1+\sqrt{5})/2}].$$

Proviamo che A è aperto. La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^4 + x^2 + y^4 - y^2$$

è continua. Dunque, l'insieme $A = f^{-1}\big((-\infty, 1)\big)$ è aperto. Per verificare che A non è chiuso è sufficiente considerare la successione di punti

$$(x_n, y_n) = \Big(\sqrt[4]{\frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)}, \sqrt[4]{\frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)}\Big), \quad n \in \mathbb{N},$$

ed osservare che $(x_n, y_n) \in A$, $(x_n, y_n) \to (\sqrt[4]{1/2}, \sqrt[4]{1/2})$ e che $f(\sqrt[4]{1/2}, \sqrt[4]{1/2}) = 1$. Dunque il punto limite è in $\overline{A}$ ma non in A.

Mostriamo che risulta

$$\overline{A} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 + x^2 - y^2 \le 1\big\},$$
$$\partial A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 + x^2 - y^2 = 1\big\}.$$

È sufficiente provare le seguenti affermazioni per un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

1) $f(x, y) = 1$ implica $(x, y) \in \overline{A}$;
2) $f(x, y) > 1$ implica $(x, y) \notin \overline{A}$.

La verifica di 2) si basa sulla continuità di f. Infatti, l'insieme $\{f > 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) > 1\}$ è aperto e per ogni punto (x, y) in questo insieme esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x, y) \subset \{f > 1\}$.

Supponiamo ora che $f(x, y) = 1$. Una possibile idea è di descrivere l'insieme $\{f = 0\}$ localmente come un grafico della forma $x \mapsto \varphi(x)$ oppure $y \mapsto \psi(y)$. In effetti, se $(x, y) \in A$ allora

$$x^2 < \frac{-1 + \sqrt{1 - 4(y^4 - y^2 - 1)}}{2}.$$

L'espressione a destra deve essere positiva. Dopo pochi conti, si ottiene la condizione di compatibilità è $y^4 - y^2 - 1 < 0$, che abbiamo già studiato: $y^2 < (1 + \sqrt{5})/2$.

In definitiva, deve essere

$$|x| < \psi(y) = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 - 4(y^4 - y^2 - 1)}}{2}}.$$

Siamo arrivati alla seguente conclusione:

$$A = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 < (1 + \sqrt{5})/2,\ |x| < \psi(y)\Big\}.$$

Ora si ottengono facilmente le tesi desiderate.

□

ESERCIZIO 4.9. Stabilire se l'insieme $K \subset \mathbb{R}^3$ con la distanza Euclidea è compatto

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z \le 1,\ x + y^2 + z^2 \le 1\}.$$

Descrivere K geometricamente.

Soluzione. L'insieme K è l'intersezione dei due insiemi

$$K_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z \le 1\},$$
$$K_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y^2 + z^2 \le 1\}.$$

Sia K_1 che K_2 sono chiusi, perchè antimmagini di insiemi chiusi rispetto a funzioni continue. Dunque $K = K_1 \cap K_2$ è chiuso.

Verifichiamo che K è limitato. Seguirà che K è compatto, per il Teorema di Heine-Borel. Se $x(x, y) \in K$ allora

$$x^2 + y^2 + z \le 1 \quad \text{e} \quad x + y^2 + z^2 \le 1.$$

Sommando membro a membro le due disequazioni si ottiene

$$x^2 + x + z^2 + z \le x^2 + x + 2y^2 + z^2 + z \le 2.$$

Completando i quadrati si ottiene

$$(x + 1/2)^2 + (z + 1/2)^2 \le 2 + 1/2 = 5/2.$$

Si deduce che esistono due numeri $a < 0 < b$ tali che $a \le x, z \le b$. La stima su y è ora facile:

$$y^2 \le 1 - x^2 - z \le 1 - z \le 1 - a.$$

L'insieme K è limitato:

$$K \subset [a, b] \times [-\sqrt{1 - a}, \sqrt{1 - a}] \times [a, b].$$

□

ESERCIZIO 4.10. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ il seguente insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 - x^2 + y^2 < 0\}.$$

1) Dire se A è compatto e/o connesso.
2) Dire se $\overline{A}$ è compatto e/o connesso.

Soluzione. Vediamo se A è limitato. Una condizione sulla coordinata x è immediata:

$$x^4 - x^2 \le x^4 - x^2 + y^4 + y^2 < 0,$$

da cui si ottiene $x^2 < 1$, ovvero $x \in (-1, 1)$. Con questa restrizione su x possiamo risolvere la disequazione in y per x fissato. Dopo qualche conto, si ottiene

$$|y| < \varphi(x) = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + 4(x^2 - x^4)}}{2}},$$

e dunque

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < \varphi(x),\ x \in (-1, 1)\}.$$

Uno studio della funzione φ mostra che A è l'unione di due insiemi aperti. Dunque A non è connesso.

Dallo studio precedente si deduce anche che

$$\overline{A} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq \varphi(x),\, x \in [-1,1]\big\}.$$

L'insieme $\overline{A}$ è chiuso e limitato e dunque compatto. L'insieme $\overline{A}$ è anche connesso, in quanto è chiaramente connesso per archi.

□

8.5. Teorema delle contrazioni.

Esercizio 4.11. Si considerino il quadrato $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \text{ e } |y| \leq 1\}$ e la funzione $f : Q \to \mathbb{R}^2$ a valori in $\mathbb{R}^2$ così definita

$$f(x,y) = \Big(\frac{1}{6}(1-y-y^2), \frac{1}{6}(x^2-x-1)\Big).$$

1) Provare che $f(Q) \subset Q$.
2) Usando il teorema delle contrazioni, provare che il sistema di equazioni

$$\begin{cases} 6x = 1 - y - y^2 \\ 6y = x^2 - x - 1 \end{cases}$$

ha nel quadrato Q una soluzione unica $(x,y) \in Q$.

Soluzione. 1) Indichiamo le due componenti di f nel seguente modo:

$$f_1(x,y) = \frac{1}{6}(1-y-y^2) \quad \text{e} \quad f_2(x,y) = \frac{1}{6}(x^2-x-1).$$

Chiaramente $|f_1(x,y)| \leq \frac{1}{6}(1+|y|+|y|^2) \leq \frac{1}{2}$ e $|f_2(x,y)| \leq \frac{1}{6}(1+|x|+|x|^2) \leq \frac{1}{2}$. Questo prova che $f(Q) \subset Q$.

2) Q è uno spazio metrico completo con la distanza Euclidea d. Proviamo che f è una contrazione su Q. L'esistenza di un'unica soluzione $(x,y) \in Q$ del sistema segue dal teorema di punto fisso.

Siano $(x,y), (\bar{x},\bar{y}) \in Q$. Allora

$$\begin{aligned} |f_1(x,y) - f_1(\bar{x},\bar{y})| &= \frac{1}{6}|y - \bar{y} + y^2 - \bar{y}^2| \leq \frac{1}{6}(|y-\bar{y}| + |y-\bar{y}||y+\bar{y}|) \\ &\leq \frac{1}{6}(1+2)|y-\bar{y}| = \frac{1}{2}|y-\bar{y}|. \end{aligned}$$

In modo identico si prova che $|f_2(x,y) - f_2(\bar{x},\bar{y})| \leq \frac{1}{2}|x-\bar{x}|$. In conclusione:

$$\begin{aligned} d(f(x,y)), f(\bar{x},\bar{y})) &= \sqrt{|f_1(x,y) - f_1(\bar{x},\bar{y})|^2 + |f_2(x,y) - f_2(\bar{x},\bar{y})|^2} \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{4}|y-\bar{y}|^2 + \frac{1}{4}|x-\bar{x}|^2} = \frac{1}{2}d((x,y),(\bar{x},\bar{y})). \end{aligned}$$

Dunque, f è una contrazione con fattore di contrazione $\lambda = \frac{1}{2} < 1$. □

Esercizio 4.12. Per $n \geq 1$ siano $B = \big\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\big\}$ e $x_0 \in B$ tale che $|x_0| \leq \frac{1}{12}$. Sia poi $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la funzione

$$T(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{9}|x|^2 x + x_0.$$

1) Provare che T trasforma B in se, ovvero che $T(B) \subset B$.
2) Per $n = 1$: provare che T è una contrazione da B in se.
3) Per $n \geq 1$: provare che l'equazione $T(x) = x$ ha una soluzione unica $x \in B$.

Soluzione. 1) Basta osservare che, per la subadditività della norma si ha per ogni $x \in B$:

$$|T(x)| \leq \frac{1}{4}|x| + \frac{1}{9}|x|^3 + |x_0| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} \leq 1.$$

2) Proviamo che T è una contrazione rispetto alla distanza Euclidea. Siccome B è completo, dal Teorema di punto fisso di Banach segue che T ha un unico punto fisso $x \in B$, che risolve l'equazione $T(x) = x$.

Nel caso $n = 1$, la funzione T si può riscrivere in questo modo:

$$T(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{9}x^3 + x_0, \quad \text{che ha derivata} \quad T'(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}x^2.$$

Osserviamo che se $|x| \leq 1$ allora

$$|T'(x)| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{3}|x|^2 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}.$$

Per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in B = [-1, 1]$, per il Teorema di Lagrange esiste un punto $x_3 \in [x_1, x_2] \subset [-1, 1]$ tale che $T(x_1) - T(x_2) = T'(x_3)(x_1 - x_2)$ e quindi

$$|T(x_1) - T(x_2)| = |T'(x_3)||x_1 - x_2| \leq \frac{7}{12}|x_1 - x_2|.$$

Dunque T è una contrazione da B in se.

Alternativamente, si ha

$$\begin{aligned}|T(x_1) - T(x_2)| &= \left|\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{9}x_1^3 - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{9}x_2^3\right| \\ &\leq \frac{1}{4}|x_1 - x_2| + \frac{1}{9}|x_1^3 - x_2^3| = \frac{1}{4}|x_1 - x_2| + \frac{1}{9}|(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)| \\ &\leq \frac{1}{4}|x_1 - x_2| + \frac{1}{9}|x_1 - x_2|(x_1^2 + |x_1||x_2| + x_2^2) \leq \Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\Big)|x_1 - x_2|.\end{aligned}$$

3) Proviamo che T è una contrazione nel caso generale $n \geq 1$. Siano $x_1, x_2 \in B$. Allora

$$|T(x_1) - T(x_2)| = \left|\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{9}|x_1|^2x_1 - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{9}|x_2|^2x_2\right| \leq \frac{1}{4}|x_1 - x_2| + \frac{1}{9}\Big||x_1|^2x_1 - |x_2|^2x_2\Big|.$$

Maggioriamo l'ultima norma nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\Big||x_1|^2x_1 - |x_2|^2x_2\Big| &= \Big||x_1|^2x_1 - |x_1|^2x_2 + |x_1|^2x_2 - |x_2|^2x_2\Big| \\ &\leq |x_1|^2|x_1 - x_2| + |x_2|\Big||x_1|^2 - |x_2|^2\Big| \\ &\leq |x_1 - x_2| + \Big||x_1|^2 - |x_2|^2\Big| \\ &\leq |x_1 - x_2| + \Big||x_1| - |x_2|\Big|\Big||x_1| + |x_2|\Big| \\ &\leq 3|x_1 - x_2|.\end{aligned}$$

In conclusione, si ottiene

$$|T(x_1) - T(x_2)| \leq \frac{1}{4}|x_1 - x_2| + \frac{1}{3}|x_1 - x_2| = \frac{7}{12}|x_1 - x_2|.$$

Questo prova che T è una contrazione da B in se, ed ora si conclude come nel punto 2).

□

Esercizio 4.13. Sia $h \in C([0,1])$ una funzione assegnata. Verificare che l'equazione funzionale

$$f(x) = h(x) + \frac{1}{2}\sin(x)\int_0^x f(t)dx, \quad x \in [0,1],$$

ha una soluzione unica $f \in C([0,1])$.

Soluzione. Sia $X = C([0,1])$ con la norma della convergenza uniforme e sia $T : X \to X$ la trasformazione

$$T(f)(x) = h(x) + \frac{1}{2}\sin(x)\int_0^x f(t)dx, \quad x \in [0,1].$$

Verifichiamo che T è una contrazione. Infatti, per ogni $f, g \in X$ si ha

$$|T(f)(x) - T(g)(x)| = \left|\frac{1}{2}\sin(x)\int_0^x (f(t) - g(t))dx\right| \leq \frac{1}{2}\|f - g\|_\infty, \quad x \in [0,1]$$

e dunque

$$\|T(f) - T(g)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|f - g\|_\infty.$$

Dunque T è una contrazione e per il Teorema di punto fisso di Banach T ha in X un unico punto fisso. □

CAPITOLO 5

Serie di funzioni e di potenze

1. Serie di funzioni. Criterio di Weierstrass

Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ oppure di $\mathbb{C}$ e sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni a valori reali o complessi su A, ovvero $f_n : A \to \mathbb{R}$ (oppure in $\mathbb{C}$), per ogni $n \in \mathbb{N}$. Introduciamo la successione delle somme parziali $s_n = f_1 + \ldots + f_n$, $n \in \mathbb{N}$. Ovviamente, $s_n : A \to \mathbb{R}$ sono ancora funzioni.

Definizione 5.1 (Convergenza puntuale e uniforme di serie di funzioni). Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni definite su un insieme A. Diciamo che la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in A,$$

converge puntualmente su A se per ogni $x \in A$ converge la successione $\big(s_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ delle somme parziali.

Diciamo che la serie di funzioni *converge uniformemente su A* se converge uniformemente su A la successione delle somme parziali $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Teorema 5.2 (Criterio di Weierstrass). Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni a valori reali o complessi su un insieme A. Se esiste una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che

$$\sup_{x\in A} |f_n(x)| \le a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty,$$

allora la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente su A.

Dim. Osserviamo in primo luogo che la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge assolutamente e quindi semplicemente in ogni punto $x \in A$. Stimiamo la differenza

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\Big| = \Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\Big| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k,$$

stima che vale per ogni $x \in A$, e dunque

$$\sup_{x\in A}\Big|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\Big| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k.$$

Siccomme la serie numerica $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, il suo resto è infinitesimo, ovvero

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = 0,$$

e quindi per confronto si ha anche

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} \Big| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \Big| = 0.$$

Questa è la convergenza uniforme della serie.

□

Talvolta si dice che una serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge totalmente su* A se converge la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x)| < \infty.$$

Il teorema precedente dice allora che la convergenza totale su A implica la convergenza uniforme su A. Il viceversa, tuttavia, non vale.

Esempio 5.3. Sia $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ il disco complesso unitario e consideriamo la serie di funzioni su A

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} = s(z).$$

Sappiamo che la serie converge puntualmente su A. Vediamo se c'è convergenza uniforme su A. Le somme parziali sono

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}, \quad n \in \mathbb{N},$$

e la differenza con la somma limite è

$$|s_n(z) - s(z)| = \Big|\frac{1-z^{n+1}}{1-z} - \frac{1}{1-z}\Big| = \Big|\frac{1-z^{n+1}}{1-z} - \frac{1}{1-z}\Big| = \Big|\frac{z^{n+1}}{1-z}\Big|,$$

e quindi

$$\sup_{z\in A} \Big|\frac{z^{n+1}}{1-z}\Big| = \infty, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dunque non c'è convergenza uniforme su A. Tuttavia, c'è convergenza uniforme su ogni insieme della forma $A_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \delta\}$ con $0 \leq \delta < 1$. Infatti si ha

$$\sup_{z\in A_\delta} \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} \leq \frac{\delta^{n+1}}{1-\delta} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^{n+1}}{1-\delta} < \infty.$$

L'affermazione segue dal Criterio di Weierstrass.

Applicando il Teorema 4.21 alla successione delle somme parziali, si prova il seguente teorema sulla derivazione sotto segno di serie.

Teorema 5.4 (Scambio di derivata e somma). Sia $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni derivabili. Supponiamo che:

i) Esiste un punto $x_0 \in [0,1]$ tale che converga la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$;

ii) La serie delle derivate $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ converge uniformemente su $[0,1]$.

Allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente su $[0,1]$, definisce una funzione derivabile, ed inoltre

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x).$$

2. Criterio di Abel–Dirichlet

In questa sezione proviamo il Criteri di Abel-Dirichlet per la convergenza uniforme di serie di funzioni. Partiamo dalla seguente formula di somma per parti.

LEMMA 5.5 (Somma per parti). Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali o complesse, supponiamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converga e poniamo $A_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$. Per $1 \le M \le N$ vale la formula di somma per parti

$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = A_M b_M - A_{N+1} b_N - \sum_{n=M+1}^{N} A_n(b_{n-1} - b_n).$$

Dim. La verifica è elementare:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=M}^{N} a_n b_n &= \sum_{n=M}^{N} (A_n - A_{n+1}) b_n \\
&= \sum_{n=M}^{N} A_n b_n - \sum_{n=M}^{N} A_{n+1} b_n = \sum_{n=M}^{N} A_n b_n - \sum_{n=M+1}^{N+1} A_n b_{n-1} \\
&= A_M b_M - A_{N+1} b_N + \sum_{n=M+1}^{N} A_n (b_n - b_{n-1}).
\end{aligned}$$

□

TEOREMA 5.6 (Criterio di Abel–Dirichlet). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale o complessa tale che converga la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, e sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni definite su un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ o di $\mathbb{C}$ che verifica:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x\in A} |f_n(x)| \le C < \infty \quad \text{e} \quad \sup_{x\in A} \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| < \infty.$$

Allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ converge uniformemente su A.

Dim. Poniamo $A_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ cosicchè $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$. Dati $n, p \in \mathbb{N}$, usando la formula di somma per parti si trova

$$\sum_{k=n}^{n+p} a_k f_k(x) = A_n f_{n-1}(x) - A_{n+p+1} f_{n+p}(x) + \sum_{k=n}^{n+p} A_k (f_k(x) - f_{k-1}(x)).$$

Fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si ha $|A_n| \leq \varepsilon$ e quindi per $p \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sup_{x\in A}\Big|\sum_{k=n}^{n+p} a_k f_k(x)\Big| \leq \varepsilon\Big(2C + \sup_{x\in A}\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(x) - f_{k-1}(x)|\Big).$$

Poichè la successione delle somme parziali della serie in esame è uniformemente di Cauchy su A, la serie converge uniformemente su A. □

3. Serie di potenze

In questa sezione studiamo le serie di potenze in campo reale o complesso.

Definizione 5.7. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri complessi e sia $z_0 \in \mathbb{C}$ fissato. Una serie di funzioni della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

si dice *serie di potenze complessa* centrata nel punto z_0.

Vogliamo capire per quali $z \in \mathbb{C}$ la serie converge e vedere dove la convergenza è uniforme. Senza perdere di generalità possiamo supporre che sia $z_0 = 0$.

Teorema 5.8 (Criterio di Cauchy–Hadamard). Data la serie di potenze complessa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, sia $R \in [0,\infty]$ il numero reale (eventualmente ∞) definito dalla relazione

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Allora:

i) La serie di potenze converge assolutamente in ogni punto $z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$.
ii) La serie di potenze converge uniformemente su ogni insieme $A_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \delta\}$ con $\delta < R$.
iii) La serie non converge nei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z| > R$.

Il numero R si dice *raggio di convergenza* della serie di potenze.

Dim. Studiamo la convergenza assoluta della serie con il Criterio della radice. Sia

$$L(z) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||z|^n} = \frac{|z|}{R}.$$

Se $|z| < R$ allora $L(z) < 1$ e la serie converge assolutamente nel punto z. Se $|z| > R$ allora $L(z) > 1$ e la serie non converge assolutamente. Il termine generale non è infinitesimo, e dunque in effetti la serie non converge nemmeno semplicemente.

Sia ora $0 \leq \delta < R$. Allora si ha:

$$\sup_{z\in A_\delta} |a_n z^n| = |a_n|\delta^n, \quad \text{e inoltre} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\delta^n < \infty.$$

Che l'ultima serie converga, si vede di nuovo col Crierio della radice, usando il fatto che $\delta < R$.

La serie di potenze converge dunque totalmente su A_δ e per il Criterio di Weierstrass converge anche uniformemente su A_δ.

□

Sulla frontiera del cerchio di convergenza $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, ovvero nei punti in cui $|z| = R$ la serie di potenze può sia convergere che non convergere.

Facciamo un breve cenno alle funzioni olomorfe. Sia $A = \{|z| < R\}$ il disco di convergenza della seguente serie di potenze. La funzione $f : A \to C$ definita da

$$f(z) = \sum_{n=1} a_n z^n, \quad z \in A,$$

è una funzione continua in A in quanto su ogni insieme $A_\delta = \{|z| \le \delta\}$ con $\delta < R$ la convergenza è uniforme. In realtà la funzione f ha proprietà molto più forti. Per ogni punto $z_0 \in A$ esiste in $\mathbb{C}$ la seguente derivata complessa

$$\frac{df(z_0)}{dz} = f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Non diamo la prova di questa affermazione. I passaggi formali della dimostrazione sono i seguenti

$$f'(z_0) = \frac{d}{dz} \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \Big|_{z=z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{d}{dz} z^n \Big|_{z=z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}.$$

Si tratta di dimostrare che è possibile scambiare la derivata (limite del rapporto incrementale complesso) con la serie.

Usiamo questi fatti per motivare la definizione di funzione olomorfa. Sia $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ per qualche $R > 0$ oppure più in generale sia A un insieme aperto di $\mathbb{C}$.

Definizione 5.9. Una funzione $f : A \to \mathbb{C}$ tale che per ogni punto $z_0 \in A$ esista in $\mathbb{C}$ la derivata complessa

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

si dice *funzione olomorfa* su A.

Dunque, le serie di potenze definiscono funzioni olomorfe sul loro disco di convergenza.

I criteri di Abel sulla convergenza uniforme delle serie di potenze permettono di studiare la convergenza uniforme fino al bordo del disco di convergenza.

Teorema 5.10 (Criterio di Abel I). Se la serie di potenze complessa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge nel punto $z_0 \in \mathbb{C}$, allora converge uniformemente sul segmento $[0, z_0] = \{tz_0 \in \mathbb{C} : 0 \le t \le 1\}$.

Dim. Per $x \in [0, 1]$ consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n f_n(x), \qquad f_n(x) = x^n.$$

La successione di funzioni $f_n(x) = x^n$ è uniformemente limitata su $[0, 1]$ e inoltre

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1) \\ 0 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

La convergenza uniforme segue dal Teorema 5.6. □

Fissati $\vartheta \in [0, \pi/2)$ e $r_0 > 0$ definiamo il cono troncato con vertice nel punto 1

$$C(\vartheta, 1, r_0) = \{z = 1 + r\mathrm{e}^{i\varphi} \in \mathbb{C} : \varphi \in [\pi - \vartheta, \pi + \vartheta],\, 0 \leq r \leq r_0\}.$$

Teorema 5.11 (Criterio di Abel II). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione complessa tale che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converga. Per ogni $\vartheta \in [0, \pi/2)$ esiste $r_0 > 0$ tale che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformemente su $C(\vartheta, 1, r_0)$.

Dim. Fissiamo $r_0 > 0$ sufficientemente piccolo in modo tale che $C(\vartheta, 1, r_0) \cap \{|z| = 1\} = \{1\}$. Mostriamo che la successione di funzioni $f_n(z) = z^n$ verifica le condizioni del Teorema 5.6. In primo luogo $|f_n(z)| \leq 1$ su $C(\vartheta, 1, r_0) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Inoltre, per $z = 1 + r\mathrm{e}^{i\varphi} \in C(\vartheta, 1, r_0)$ si ha

$$|z^{n+1} - z^n| = |z|^n |z - 1| = r|1 + r\mathrm{e}^{i\varphi}|^n,$$

e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z^{n+1} - z^n| = r\frac{1}{1 - |1 + r\mathrm{e}^{i\varphi}|} = r\frac{1 + |1 + r\mathrm{e}^{i\varphi}|}{1 - |1 + r\mathrm{e}^{i\varphi}|^2} = \frac{1 + |1 + r\mathrm{e}^{i\varphi}|}{-r - 2\cos\varphi}.$$

Se $\varphi \in [\pi - \vartheta, \pi + \vartheta]$ allora $-2\cos\varphi \geq 2\cos\vartheta > 0$, e scegliendo $r_0 < 2\cos\vartheta$ si trova

$$\sup_{z \in C(\vartheta, 1, r_0)} \sum_{n=0}^{\infty} |z^{n+1} - z^n| < \infty.$$

□

4. La funzione esponenziale in campo reale e complesso

Introduciamo la funzione esponenziale in campo reale e complesso e studiamo le sue proprietà più importanti.

Partiamo dal caso reale. Definiamo la funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Per il Criterio del Rapporto la serie converge (assolutamente) per ogni $x \in \mathbb{R}$. Il raggio di convergenza di questa serie di potenze reale è $R = \infty$. Useremo la notazione $\varphi(x) = \mathrm{e}^x = \exp(x)$ per indicare la *funzione esponenziale*.

Teorema 5.12. Per ogni numero reale $x \in \mathbb{R}$ il seguente limite esiste finito e precisamente:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \tag{5.1}$$

Inoltre, per $x > 0$ la convergenza è monotona crescente.

Dim. Ci limiteremo al caso $x > 0$. Proviamo che la successione

$$a_n = \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

è crescente e superiormente limitata. Da questo seguirà l'esistenza finita del limite in (5.1).

Dalla formula del binomio di Newton si ottiene

$$a_n = \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k} = \sum_{k=0}^n \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) \dots \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) \frac{x^k}{k!}, \tag{5.2}$$

e in modo analogo

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) \dots \Big(1 - \frac{k-1}{n+1}\Big) \frac{x^k}{k!}.$$

Dalle disuguaglianze

$$\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) < \Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big), \dots, \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) < \Big(1 - \frac{k-1}{n+1}\Big),$$

valide per $k = 0, 1, \dots, n$, e dal fatto che $x^k > 0$ segue che $a_n < a_{n+1}$. Siccome

$$\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) < 1, \dots, \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) < 1,$$

dall'identità (5.2) si trova anche la maggiorazione

$$\Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n < \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} < \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!} < \infty. \tag{5.3}$$

Questo prova l'esistenza finita del limite. Inoltre, per $n \to \infty$ si ottiene la disuguaglianza

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n \leq \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!}.$$

Proviamo la disuguaglianza opposta. Siano $m, n \in \mathbb{N}$ numeri tali che $n \geq m$. Allora si ha:

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^n \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) \dots \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) \frac{x^k}{k!} \\ &\geq \sum_{k=0}^m \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) \dots \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) \frac{x^k}{k!}. \end{aligned}$$

Passando al limite per $n \to \infty$ si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n \geq \sum_{k=0}^m \frac{x^k}{k!}$$

e facendo ora il limite per $m \to \infty$ si trova

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n \geq \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!}.$$

Questo termina la dimostrazione del teorema nel caso $x > 0$. □

Osservazione 5.13 (Stima del resto). Siano $x \in \mathbb{R}$ ed $m, n \in \mathbb{N}$ numeri tali che $0 < x < m \le n$. Spezziamo la somma parziale della serie esponenziale nel seguente modo:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=m}^{n} \frac{x^k}{k!} < \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=m}^{n} \frac{x^k}{m^{k-m} m!}.$$

Abbiamo usato la disuguaglianza $k! = k(k-1) \cdot \ldots \cdot (m+1)m! > m^{k-m} m!$. D'altra parte, dalla formula per la somma geometrica parziale, si ottiene

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{x^k}{m^{k-m} m!} = \frac{x^m}{m!} \sum_{h=0}^{n-m} \Big(\frac{x}{m}\Big)^h = \frac{x^m}{m!} \frac{1-(x/m)^{n-m+1}}{1-x/m} < \frac{x^m}{m!} \frac{m}{m-x}.$$

Abbiamo usato il fatto che $m > x > 0$. In conclusione, troviamo la maggiorazione per il resto:

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{x^k}{k!} < \frac{x^m}{m!} \frac{m}{m-x}, \quad 0 < x < m \le n.$$

Questa disuguaglianza non dipende da n, nel membro di destra, e quindi si trova la stima per il resto della serie esponenziale

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \le \frac{x^m}{m!} \frac{m}{m-x}, \quad 0 < x < m. \tag{5.4}$$

Applichiamo questa formula per una stima del numero di Nepero che, per definizione, è il numero

$$\mathrm{e} = \lim_{n \to \infty} \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Per ogni $m \in \mathbb{N}$ si ha $\mathrm{e} > \sum_{k=0}^{m-1} 1/k!$, e con la scelta $m = 4$ si ottiene la stima dal basso

$$\mathrm{e} > 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = 2 + \frac{2}{3}.$$

Per ottenere una stima dall'alto si può usare la (5.4) con $x = 1$:

$$\mathrm{e} \le \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} + \frac{m}{m!(m-1)},$$

che con $m = 4$ fornisce

$$\mathrm{e} \le 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{18} < 3.$$

Osservazione 5.14. Presentiamo una seconda dimostrazione del Teorema 5.12. Precisamente, vogliamo provare che per ogni numero complesso $z \in \mathbb{C}$ si ha

$$\lim_{n \to \infty} \Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e proviamo che è possibile scegliere $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \ge n$ si abbia:

$$\Big|\Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^n - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\Big| < \varepsilon$$

Siano $m, n \in \mathbb{N}$ da discutere tali che $m \leq n$. Dalla formula per il Binomio di Newton si trova, come in (5.2) nella dimostrazione del Teorema 5.12,

$$\Big(1+\frac{z}{n}\Big)^n - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m-1} \Big[\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)-1\Big]\frac{z^k}{k!}$$
$$+ \sum_{k=m}^{n} \Big(1-\frac{1}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)\frac{z^k}{k!} - \sum_{k=m}^{\infty}\frac{z^k}{k!}.$$

Prendendo i moduli ed usando la subadittività si ottiene

$$\Big|\Big(1+\frac{z}{n}\Big)^n - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\Big| \leq \sum_{k=0}^{m-1} \Big|\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)-1\Big|\frac{|z|^k}{k!}$$
$$+ \sum_{k=m}^{n} \Big|\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)\Big|\frac{|z|^k}{k!} + \sum_{k=m}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!}$$
$$\leq \sum_{k=0}^{m-1} \Big|\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)-1\Big|\frac{|z|^k}{k!} + 2\sum_{k=m}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!}.$$

Possiamo scegliere $m \in \mathbb{N}$ con $m > |z|$ e indipendentemente da n tale che – usiamo la stima del resto, ma se ne potrebbe fare a meno –

$$2\sum_{k=m}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!} \leq \frac{2|z|^m}{m!}\frac{m}{m-|z|} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

A questo punto, possiamo scegliere $\bar{n}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si abbia:

$$\sum_{k=0}^{m-1} \Big|\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)-1\Big|\frac{|z|^k}{k!} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Questo conclude la dimostrazione.

Teorema 5.15. La funzione esponenziale $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \mathrm{e}^x$, ha le seguenti proprietà:

1) $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ (identità fondamentale);
2) $\mathrm{e}^{-x} = 1/\mathrm{e}^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
3) $\mathrm{e}^x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
4) $\mathrm{e}^x < \mathrm{e}^y$ se $x < y$;
5) Per ogni $y > 0$ esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $\mathrm{e}^x = y$.

Dim. Diamo solo dei cenni sulle dimostrazioni.

1) Una prova della formula fondamentale si può ottenere mostrando che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Big(1+\dfrac{x+y}{n}\Big)^n}{\Big(1+\dfrac{x}{n}\Big)^n\Big(1+\dfrac{y}{n}\Big)^n} = 1.$$

La verifica di questo fatto è lasciata come esercizio al lettore. Vedremo nel seguito un altra linea di dimostrazione.

2) Segue da punto precedente in quanto $1 = \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^{x-x} = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{-x}$

3) Quando $x \geq 0$, la positività deriva dalla definizione

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq 1 > 0.$$

Quando $x < 0$, la positività deriva dal punto 2).

4) Che per $x \geq 0$ la funzione esponenziale sia strettamente crescente deriva dalla definizione. Per $x < 0$ la monotonia deriva dal punto 2).

5) Per confronto si deduce che $\mathrm{e}^x \to \infty$ per $x \to \infty$. Dal punto 2) segue che $\mathrm{e}^x \to 0$ quando $x \to -\infty$. Inoltre la funzione esponenziale è continua (la serie converge uniformemente sugli intervalli limitati). Dunque la suriettività di $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ segue dal Teorema dei valori intermedi per le funzioni continue. $\square$

Osservazione 5.16. 1) La proprietà 1) si può esprimere anche in questo modo: la funzione esponenziale $\varphi(x) = \mathrm{e}^x$ è un omomorfismo dal gruppo additivo $(\mathbb{R}, +)$ al gruppo moltiplicativo $(\mathbb{R}^+, \cdot)$, dove $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

2) La funzione esponenziale $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $\varphi(x) = \mathrm{e}^x$, è iniettiva e suriettiva. Dunque, è definita la sua funzione inversa $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, che è la funzione logaritmo $\varphi^{-1} = \log$.

3) Il numero e non è razionale, $\mathrm{e} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. La prova di questo fatto è lasciata come esercizio al lettore.

Ora passiamo alla definizione della funzione esponenziale in campo complesso. Definiamo le tre funzioni $\exp, \cos, \sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tramite le seguenti serie di potenze complesse:

$$\begin{aligned} \exp(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \\ \cos(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \\ \sin(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Scriveremo anche $\exp(z) = \mathrm{e}^z$. È facile verificare che il raggio di convergenza delle tre serie è $R = \infty$. Proviamo ad esempio che la prima serie converge assolutamente in ogni punto $z \in \mathbb{C}$ con il criterio del rapporto. È sufficiente considerare il caso $z \neq 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|z|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0 < 1,$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Quando $z = x \in \mathbb{R}$ la definizione di $\exp(x)$ coincide con quella data a inizio sezione.

Teorema 5.17. La funzione $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ha le seguenti proprietà:

1) $\exp(z + \zeta) = \exp(z)\exp(\zeta)$ per ogni $z, \zeta \in \mathbb{C}$;
2) $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$ per ogni $z \in \mathbb{C}$;
3) $|\exp(ix)| = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
4) $\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (formule di Eulero).

Dim. 1) Dati $z, \zeta \in \mathbb{C}$, si ha

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^\zeta &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^k}{k!}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\frac{\zeta^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k\zeta^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+\zeta)^n}{n!} = \mathrm{e}^{z+\zeta}.
\end{aligned}$$

Avvertiamo il lettore che l'uguaglianza centrale, che è corretta, andrebbe motivata meglio. Poi abbiamo usato la formula per il binomio di Newton.

2) Questa affermazione segue direttamente dalla definizione:

$$\overline{\exp(z)} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{z^n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n}{n!} = \exp(\bar{z}).$$

3) Sia ora $x \in \mathbb{R}$. Usando le proprietà 2) e 1) si ottiene la tesi:

$$|\exp(ix)|^2 = \exp(ix)\overline{\exp(ix)} = \exp(ix)\exp(-ix) = \exp(ix - ix) = \exp(0) = 1.$$

4) Sia di nuovo $x \in \mathbb{R}$. Allora:

$$\begin{aligned}
\exp(ix) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n}x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos(x) + i\sin(x).
\end{aligned}$$

$\square$

Osservazione 5.18. Dalle affermazioni 3) e 4) risulta analiticamente provata l'identità trigonometrica fondamentale $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Ora usiamo la funzione esponenziale complessa per definire la funzione logaritmo in campo complesso. Consideriamo la striscia $S = \big\{z \in \mathbb{C} : -\pi < \mathrm{Im}(z) < \pi\big\}$ e l'insieme $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \big\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = 0 \text{ e } \mathrm{Re}(z) \le 0\big\}$.

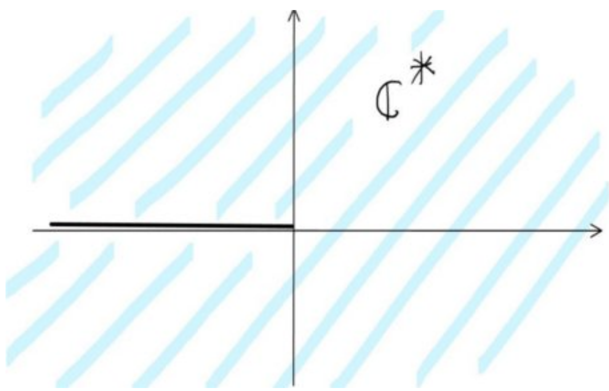

Figura 1

Definiamo la funzione argomento $\arg : \mathbb{C}^* \to (-\pi, \pi)$ in questo modo: $\arg(z)$ =angolo con segno formato da z (unito a 0) con il semiasse positivo delle parti reali. Allora abbiamo la rappresentazione esponenziale di $z \in \mathbb{C}^*$

$$z = |z| \mathrm{e}^{i\arg(z)}.$$

La funzione $\exp : S \to \mathbb{C}^*$ è iniettiva, infatti se $z = x+iy, w = s+it \in S$ verificano $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^w$ allora deve essere

$$\mathrm{e}^{x-s} = \mathrm{e}^{i(t-y)}$$

e quindi $x = s$ ed $y = t$. La funzione $\exp : S \to \mathbb{C}^*$ è anche suriettiva, in quanto fissato $z \in \mathbb{C}^*$ l'equazione $\exp(w) = z = |z|\mathrm{e}^{i\arg(z)}$ ha la soluzione (unica) $w = \log|z| + i\arg(z)$. Dunque è ben definita la funzione $\log : \mathbb{C}^* \to S \subset \mathbb{C}$

$$\log z = \log|z| + i\arg(z), \quad z \in \mathbb{C}^*.$$

Questa è la funzione logaritmo in campo complesso.

5. Esercizi con soluzione

Esercizio 5.1. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della seguente serie di funzioni:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+n^2x)\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}, \quad x \geq 0.$$

Soluzione. Osserviamo preliminarmente che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+n^2x)\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2x\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2},$$

e che per $x \geq 0$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} < \infty.$$

Per il Criterio di Weierstrass la serie a sinistra converge uniformemente su $[0, \infty)$.

È dunque sufficiente studiare la convergenza della serie

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2x\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x), \quad x \geq 0.$$

Per $x = 0$ la serie converge a 0 in quanto il termine generale è 0 per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Studiamo brevemente le funzioni $f_n(x) \geq 0$, per $x \geq 0$. La derivata è:

$$f_n'(x) = \frac{n^2\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}(1-nx).$$

Dunque, la funzione f_n cresce su $[0, 1/n]$ e decresce su $[1/n, \infty)$. Deduciamo che, fissato $\delta > 0$, per ogni $n \geq 1/\delta$ si ha

$$\sup_{x \geq \delta} f_n(x) = f_n(\delta).$$

Siccome la seguente serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\delta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\delta\mathrm{e}^{-n\delta}}{1+n^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \delta\mathrm{e}^{-n\delta} = \frac{\delta}{1-\mathrm{e}^{-\delta}} < \infty,$$

deduciamo dal Criterio di Weierstrass che la serie $(*)$ converge uniformemente su $[\delta, \infty)$, per ogni $\delta > 0$.

Proviamo che non c'è convergenza uniforme su $[0, \infty)$. Osserviamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x \mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2} \geq \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-nx} = \frac{x}{2} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}.$$

Siccome

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{2} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

deduciamo che la serie $(*)$ definisce una funzione su $[0, \infty)$ che vale 0 per $x = 0$ e che non è continua in $x = 0$. Siccome la convergenza uniforme preserva la continuità, concludiamo che la serie $(*)$ non converge uniformemente su $[0, \infty)$, e dunque nemmeno la serie iniziale.

□

Esercizio 5.2. Al variare del parametro reale $\alpha \geq 0$, si consideri la serie di potenze nella variabile complessa $z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^n}{n^\alpha + 1}.$$

i) Calcolare il raggio di convergenza R della serie.
ii) Discutere la convergenza della serie nei punti $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = R$.
iii) Discutere la convergenza totale e uniforme della serie.

Sia noto che la successione $n \mapsto n/(n^\alpha + 1)$ è decrescente quando $\alpha > 1$.

Soluzione. i) Il raggio di convergenza R è dato dalla formula

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{n^\alpha + 1}} = 1.$$

Il limsup è in effetti un lim, ed il valore del limite segue da risultati noti. Dunque il raggio di convergenza è $R = 1$.

ii) Quando $|z| = 1$ si ha $z = \mathrm{e}^{i\vartheta}$ per qualche $\vartheta \in [0, 2\pi)$ e la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \mathrm{e}^{in\vartheta}}{n^\alpha + 1}.$$

Se $\alpha \leq 1$ si ha

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n \mathrm{e}^{in\vartheta}}{n^\alpha + 1} \neq 0.$$

Il limite in effetti non esiste. Mancando la condizione necessaria di convergenza, la serie in esame non converge se $\alpha \leq 1$.

Nel seguito, possiamo restringere lo studio al caso $\alpha > 1$.

Quando $\vartheta = 0$, il fattore "rotante" scompare e il termine generale della serie è asintotico ad $1/n^{\alpha-1}$. La verifica di questo fatto è elementare. Dal Criterio del confronto asintotico, segue che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^\alpha + 1} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 2.$$

Quando $\vartheta \in (0, 2\pi)$ usiamo il Criterio di Abel-Dirichlet. Se $\alpha > 1$, la successione $a_n = n/(n^\alpha + 1)$ è decrescente (fatto noto) e infinitesima (dimostrazione elementare). Inoltre la successione $b_n = \mathrm{e}^{in\vartheta}$ ha primitiva limitata (fatto noto più volte visto in classe). Dunque, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\mathrm{e}^{in\vartheta}}{n^\alpha + 1}$$

converge per $\alpha > 1$.

iii) Dal Criterio di Cauchy-Hadamard sappiamo che su ciascun insieme $A_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \delta\}$ con $0 \leq \delta < 1$ la serie converge totalmente e quindi uniformemente.

L'estremo superiore sull'insieme $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ del termine generale della serie di potenze è

$$\sup_{|z|\leq 1} \left| \frac{nz^n}{n^\alpha + 1} \right| = \frac{n}{n^\alpha + 1}.$$

Quando $\alpha > 2$, il Criterio di Weierstrass assicura la convergenza uniforme della serie su tutto il disco $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Quando $1 < \alpha \leq 2$ non c'è convergenza uniforme su questo disco, in quanto manca la convergenza puntuale in $z = 1$.

Dal Criterio di Abel sappiamo che la serie converge uniformemente su ogni segmento $[0, z]$ con $|z| = 1$, $z \neq 1$, anche nel caso $1 < \alpha \leq 2$.

$\square$

Esercizio 5.3. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametro e si consideri la serie di potenze complessa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1 + n^\alpha)}{\sqrt{n}} z^n.$$

i) Calcolare il raggio di convergenza R della serie.
ii) Discutere la convergenza nei punti $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = R$.
iii) Discutere la convergenza totale e uniforme della serie.

Soluzione. i) Il raggio di convergenza $R \in [0, \infty]$ è definito dalla relazione

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\log(1 + n^\alpha)}{\sqrt{n}}}.$$

Vedremo che in effetti il limite superiore è un limite. È un fatto noto che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n}} = 1.$$

Analogamente, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log(1 + n^\alpha)} = 1.$$

Questo si prova con il teorema del confronto nel seguente modo. Se $\alpha \geq 0$ allora per ogni $n \geq 1$ si ha

$$\sqrt[n]{2} \leq \sqrt[n]{\log(1 + n^\alpha)} \leq \sqrt[n]{n^\alpha},$$

dove le successioni a destra e sinistra convergono entrambe ad 1. Se $\alpha < 0$ si hanno le disuguaglianze

$$\sqrt[n]{n^\alpha/2} \leq \sqrt[n]{\log(1 + n^\alpha)} \leq \sqrt[n]{n^\alpha},$$

con la disuguaglianza di sinistra che vale definitivamente e quella di destra per ogni $n \geq 1$.

Concludiamo che il limsup che definisce R è un limite e si ha $R = 1$.

ii) Quando $|z| = 1$ allora $z = \mathrm{e}^{i\vartheta}$ per qualche $\vartheta \in [0, 2\pi)$ e la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+n^\alpha)}{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{in\vartheta}.$$

Iniziamo a studiare il caso $\vartheta = 0$. Dalla maggiorazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+n^\alpha)}{\sqrt{n}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2-\alpha}}$$

segue che per $1/2 - \alpha > 1$, ovvero $\alpha < -1/2$, la serie converge per il criterio del confronto. Esaminiamo il caso $\alpha \geq -1/2$. In questo caso usiamo il confronto

$$\frac{\log(1+n^\alpha)}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2} \frac{n^\alpha}{\sqrt{n}},$$

che vale definitivamente, per dedurre che la serie diverge.

Passiamo al caso $\vartheta \in (0, 2\pi)$. Se $\alpha < -1/2$ la serie converge assolutamente (e quindi semplicemente) per gli argomenti del punto precedente. Esaminiamo il caso $\alpha \geq -1/2$. La successione

$$a_n = \frac{\log(1+n^\alpha)}{\sqrt{n}}$$

è infinitesima e definitivamente decrescente per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. La successione $b_n = \mathrm{e}^{in\vartheta}$ ha primitiva limitata. La serie dunque converge per il Criterio di Abel-Dirichlet.

iii) Il Criterio di Cauchy-Hadamard ci assicura della convergenza totale e uniforme su ogni insieme $A_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \delta\}$ con $0 \leq \delta < 1$.

Quando $\alpha < -1/2$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{|z|\leq 1} \left| \frac{\log(1+n^\alpha)}{\sqrt{n}} z^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+n^\alpha)}{\sqrt{n}} < \infty,$$

e quindi si ha convergenza totale e uniforme sul disco chiuso $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

Quando $\alpha \geq -1/2$ non si può avere convergenza uniforme su A perchè non c'è la convergenza puntale in $z = 1$.

□

Esercizio 5.4. Sia $p \geq 0$ un parametro fissato. Per $x \geq 0$ si consideri la serie di funzioni

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^p x^{p+1} \mathrm{e}^{-nx}, \quad x \geq 0.$$

i) Discutere la convergenza puntuale.
ii) Studiare la convergenza totale e uniforme.
iii) Provare che

$$f(x) \geq \int_1^\infty (t-1)^p x^{p+1} \mathrm{e}^{-tx}\, dt, \quad x \geq 0.$$

iv) Provare che f non è continua in $x = 0$.

Soluzione. Soluzione fatta in classe.

CAPITOLO 6

Calcolo differenziale in più variabili

1. Derivate parziali e derivate direzionali in $\mathbb{R}^n$

Fissiamo su $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, la base canonica $\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_n$, dove, per ogni $i = 1, \dots, n$, si ha $\mathrm{e}_i = \big(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\big) \in \mathbb{R}^n$, con 1 nella posizione i-esima. Interpreteremo spesso e_i come vettore colonna

$$\mathrm{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

con 1 nella riga i-esima.

Definizione 6.1 (Derivata parziale). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Diciamo che una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ ha derivata parziale i-esima, $i = 1, \dots, n$, nel punto $x \in A$ se esiste finito il limite

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\mathrm{e}_i) - f(x)}{t}.$$

Diremo che f è *derivabile in* x se esistono tutte le derivate parziali $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

Osserviamo che, essendo A aperto ed $x \in A$, si ha $x + t\mathrm{e}_i \in A$ per ogni t sufficientemente piccolo e quindi il limite che definisce la derivata parziale è ben definito.

Esempio 6.2. Le derivate parziali si calcolano con le regole del calcolo differenziale di una variabile. Sia ad esempio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{x^2} \sin y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Allora le derivate parziali esistono in ogni punto e sono

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x\mathrm{e}^{x^2} \sin y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \mathrm{e}^{x^2} \cos y.$$

Esempio 6.3. La funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$, non è derivabile in $x = 0$. Per $x \neq 0$, f è invece derivabile e inoltre

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{|x|}, \quad x \neq 0.$$

Osservazione 6.4. Nella letteratura si incontrano le seguenti notazioni alternative per indicare le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_i f = \partial_{x_i} f = D_i f = f_{x_i}.$$

Osservazione 6.5 (Significato geometrico delle derivate parziali). Consideriamo una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derivabile nel punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Le due curve $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$\gamma_1(t) = \big(x + t, y, f(x + t, y)\big), \quad \gamma_2(t) = \big(x, y + t, f(x, y + t)\big), \quad t \in \mathbb{R},$$

sono derivabili in $t = 0$ e i vettori in $\mathbb{R}^3$

$$\dot\gamma_1(0) = (1, 0, f_x(x, y)\big), \quad \dot\gamma_2(0) = (0, 1, f_y(x, y)\big)$$

sono linearmente indipendenti e generatono dunque un piano 2-dimensionale in $\mathbb{R}^3$. Questo è il *candidato* piano tangente al grafico di

$$\mathrm{gr}(f) = \big\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathbb{R}^2\big\}$$

nel punto $(0, f(0)) \in \mathrm{gr}(f)$.

Definizione 6.6 (Gradiente). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile nel punto $x \in A$. Il vettore

$$Df(x) = \nabla f(x) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\Big) \in \mathbb{R}^n$$

si dice *gradiente di f in x*.

Osservazione 6.7 (Significato geometrico del gradiente). Supponiamo che sia $\nabla f(x) \neq 0$. Il vettore $\nabla f(x)$ contiene due informazioni:

i) Il versore orientato $\nabla f(x)/|\nabla f(x)|$ indica la direzione orientata di massima crescita della funzione f.
ii) La lunghezza $|\nabla f(x)|$ misura la velocità di crescita.

Definizione 6.8 (Derivata direzionale). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Diciamo che una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ ha derivata direzionale nella direzione $v \in \mathbb{R}^n$ nel punto $x \in A$ se esiste finito il limite

$$f_v(x) = \frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}.$$

Esempio 6.9. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel seguente modo

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & x = y = 0. \end{cases}$$

Calcoliamo le derivate direzionali di f in $0 \in \mathbb{R}^2$ in una generica direzione $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ con $v \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(tv) - f(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{v_1^2 v_2}{t^2 v_1^4 + v_2^2}.$$

Quando $v_1 = 0$ oppure $v_2 = 0$ il limite è certamente 0. Dunque, si trova in particolare

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0.$$

Inoltre, quando $v_2 \neq 0$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{v_1^2 v_2}{t^2 v_1^4 + v_2^2} = \frac{v_1^2}{v_2}.$$

Osserviamo che il limite ottenuto non è un'espressione lineare in v.

La funzione f, dunque, ha derivata direzionale in 0 in ogni direzione. Tuttavia, f non è continua in 0, dal momento che per ogni $m \in \mathbb{R}$ risulta

$$\lim_{t\to 0} f(t, mt^2) = \frac{m}{1+m^2}$$

e il valore del limite dipende dall'apertura della parabola.

Nel grafico di f

$$\mathrm{gr}(f) = \big\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathbb{R}^2\big\}$$

c'è uno "strappo" nel punto $0 \in \mathrm{gr}(f)$. Questo impedisce l'esistenza di un "piano tangente" al grafico, comunque si intenda la nozione di "piano tangente".

In conclusione, la nozione di funzione derivabile è naturale ed utile. Tuttavia è insoddisfacente per almeno due motivi: per $n \geq 2$ la derivabilità (anche in tutte le direzioni) non implica la continuità; sempre per $n \geq 2$ la derivabilità non implica l'esistenza di un piano tangente al grafico della funzione.

2. Funzioni a valori vettoriali

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e consideriamo una funzione $f : A \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$. Avremo $f = (f_1, \ldots, f_m)$ dove $f_j : A \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$, sono le funzioni coordinate di f. D'ora in avanti, ci atterremo alla convenzione di rappresentare f come un vettore colonna

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

Diciamo che f è derivabile in un punto $x \in A$ se ciascuna coordinata $f_1, \ldots, f_m$ è derivabile in x. In questo caso, scriveremo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_i}(x) \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Definizione 6.10 (Matrice Jacobiana). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione derivabile nel punto $x \in A$. La matrice

$$J_f(x) = Jf(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x) \end{pmatrix}$$

si dice *matrice Jacobiana di* f *in* x. La matrice $Jf(x)$ ha m righe ed n colonne.

Il significato geometrico della matrice Jacobiana è più complicato del significato geometrico del gradiente di una funzione scalare.

3. Funzioni differenziabili

In questa sezione introduciamo la definizione di funzione *differenziabile*. Ci servono alcuni richiami preliminari di algebra lineare.

Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una trasformazione lineare, $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. Fissiamo le basi

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_n \quad \text{base canonica di } \mathbb{R}^n, \\ &\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_m \quad \text{base canonica di } \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Siano $T_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$, i numeri reali definiti tramite la seguente relazione

$$T\mathrm{e}_j = \sum_{i=1}^m T_{ij}\mathrm{e}_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Esiste una corrispondenza biunivoca fra la trasformazione lineare T e la matrice $(T_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$. Scriviamo il punto $x \in \mathbb{R}^n$ come vettore colonna

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Avremo allora, con la notazione di prodotto righe-colonne,

$$T(x) = Tx = \begin{pmatrix} T_{11} & \dots & T_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{m1} & \dots & T_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^n T_{1j}x_j \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^n T_{mj}x_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

La corrispondenza fra T e la matrice $(T_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ dipende dalla scelta delle basi canoniche su $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}^m$.

Definizione 6.11 (Differenziale). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, un insieme aperto. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, si dice *differenziabile* (o Fréchet-differenziabile) in un punto $x_0 \in A$ se esiste una trasformazione lineare $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0. \tag{6.2}$$

Chiameremo la trasformazione lineare

$$df(x_0) = T$$

il *differenziale di f in x_0*.

OSSERVAZIONE 6.12. Lasciamo al lettore il compito di verificare le seguenti affermazioni.

1. Unicità del differenziale. Se il differenziale esiste allora esso è unico. Precisamente, se $T, \widehat{T} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ sono trasformazioni lineari che verificano (6.2) (per lo stesso punto x_0), allora $T = \widehat{T}$. Infatti, per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$Tv = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

e l'unicità di T segue dall'unicità del limite.

2. Caso $n = 1$. Quando $n = 1$ (e indipendentemente da $m \geq 1$), le nozioni di derivabilità e differenziabilità coincidono e inoltre

$$df(x_0) = f'(x_0) \quad \text{come vettori di } \mathbb{R}^m.$$

La verifica di queste affermazioni è lasciata come esercizio.

3. Differenziale di una trasformazione lineare. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è lineare, allora $df(x_0) = f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Questo segue in modo elementare dal fatto che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0) = f(x) - f(x_0) - f(x - x_0) = 0.$$

4. Caso vettoriale. Una funzione f a valori in $\mathbb{R}^m$ è differenziabile se e solo se le sue m coordinate sono differenziabili.

La Definizione 6.11 ha una generalizzazione naturale nell'ambito degli spazi normati.

DEFINIZIONE 6.13. Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati, e sia $A \subset X$ un aperto. Una funzione $f : A \to Y$ si dice *Fréchet-differenziabile* in un punto $x_0 \in A$ se esiste una trasformazione lineare e continua $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)\|_Y}{\|x - x_0\|_Y} = 0. \tag{6.3}$$

La trasformazione lineare $df(x_0) = T$ si chiama il *differenziale di f in x_0*.

Il differenziale è per definizione una trasformazione lineare e *continua*.

TEOREMA 6.14 (Caratterizzazione della differenziabilità). Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione con $A \subset \mathbb{R}^n$ insieme aperto e $x_0 \in A$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

A) La funzione f è differenziabile in x_0.
B) Esistono una trasformazione lineare $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ed una funzione $E_{x_0} : A \to \mathbb{R}^m$ tali che $f(x) = f(x_0) + T(x - x_0) + E_{x_0}(x)$ per $x \in A$ e

$$E_{x_0}(x) = o(|x - x_0|), \quad x \to x_0.$$

Dim. A)⇒B). Scegliamo $T = df(x_0)$ e definiamo $E_{x_0}(x) = f(x)-f(x_0)-T(x-x_0)$. La funzione E_{x_0} verifica la proprietà richiesta

$$\lim_{x\to x_0} \frac{E_{x_0}(x)}{|x-x_0|} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-T(x-x_0)}{|x-x_0|} = 0,$$

in quanto f è differenziabile.

B)⇒A) Proviamo che $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ data in B) è il differenziale di f:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-T(x-x_0)}{|x-x_0|} = \lim_{x\to x_0} \frac{E_{x_0}(x)}{|x-x_0|} = 0.$$

□

Teorema 6.15. Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile nel punto $x_0 \in A$ con $A \subset \mathbb{R}^n$ insieme aperto. Allora:

i) f è continua in x_0.

ii) f ha in x_0 derivata direzionale in ogni direzione $v \in \mathbb{R}^n$ e inoltre

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = df(x_0)(v). \tag{6.4}$$

In particolare, la differenziabilità implica la derivabilità.

Dim. i) Usiamo la caratterizzazione B) della differenziabilità nel teorema precedente, la continuità di T e le proprietà di E_{x_0}:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \big(f(x_0) + T(x-x_0) + E_{x_0}(x)\big) = f(x_0).$$

ii) Usiamo di nuovo la caratterizzazione B):

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0} \frac{df(x_0)(tv) + E_{x_0}(x_0+tv)}{t}\\ &= df(x_0)(v) + \lim_{t\to 0} \frac{E_{x_0}(x_0+tv)}{t} = df(x_0)(v).\end{aligned}$$

□

Osservazione 6.16 (Significato geometrico del gradiente). Quando $m = 1$ si ha $df(x_0)(v) = \langle \nabla f(x_0), v\rangle$ e quindi si ottiene la seguente formula di rappresentazione per la derivata direzionale

$$f_v(x_0) = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v\rangle.$$

Se $|v| = 1$ allora $|f_v(x_0)| = |\langle \nabla f(x_0), v\rangle| \le |\nabla f(x_0)|$. Deduciamo che

$$\max_{|v|=1} f_v(x_0) = |\nabla f(x_0)|$$

e il massimo è raggiunto con la scelta $v = \nabla f(x)/|\nabla f(x)|$.

Osservazione 6.17 (Test della differenziabilità). Quando $m = 1$, la formula (6.2) che definisce la differenziabilità si può riscrivere nel seguente modo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle}{|x - x_0|} = 0. \tag{6.5}$$

Dunque, per controllare la differenziabilità di f in x_0 si controlla prima l'esistenza delle derivate parziali in x_0, e poi si verifica che il limite in (6.5) sia zero.

Osservazione 6.18 (Identificazione di $df(x_0)$ e $Jf(x_0)$). Sia ora f a valori in $\mathbb{R}^m$ con $m \geq 1$ e sia $(T_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ la matrice associata al differenziale $T = df(x_0)$. Allora avremo

$$T_{ij} = \langle T\mathrm{e}_j, \mathrm{e}_i \rangle = \langle df(x_0)(\mathrm{e}_j), \mathrm{e}_i \rangle = \langle f_{x_j}(x_0), \mathrm{e}_i \rangle = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0).$$

Dunque, possiamo identificare $df(x_0)$ con la matrice Jacobiana $Jf(x_0)$

$$df(x_0) = Jf(x_0).$$

Questa identificazione dipende dalla scelta delle basi canoniche.

Definizione 6.19 (Piano tangente ad un grafico). Sia $f : A \to \mathbb{R}$ differenziabile in un punto $x_0 \in A$. Sappiamo allora che si ha lo sviluppo

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + E_{x_0}(x),$$

dove $E_{x_0}(x) = o(|x - x_0|)$ per $x \to x_0$. Consideriamo la parte lineare dello sviluppo

$$\varphi(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

La funzione $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è affine, verifica $\varphi(x_0) = f(x_0)$ e $|f(x) - \varphi(x)| = o(|x - x_0|)$ per $x \to x_0$. Il suo grafico

$$\mathrm{gr}(\varphi) = \big\{(x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n\big\}$$

è un piano affine n-dimensionale che si dice *piano tangente (affine) al grafico di* f nel punto $(x_0, f(x_0)) \in \mathrm{gr}(f)$.

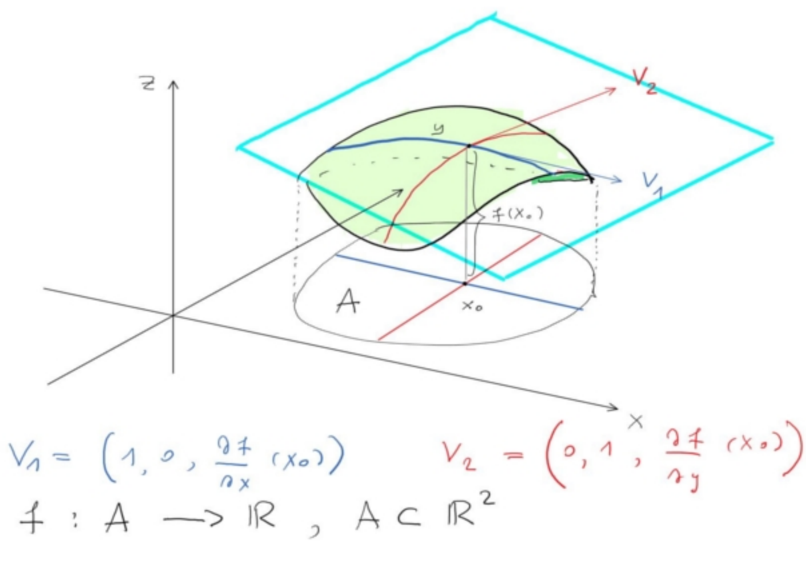

Figura 1

L'equazione $x_{n+1} = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle$ nelle variabili $(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ si chiama equazione cartesiana del piano tangente (affine) al grafico di f relativamente al punto $x_0 \in A$. Nel contesto della figura precedente, le soluzioni di questa equazione formano il piano azzurro.

Detto $M = \mathrm{gr}(f)$ il grafico di f, il piano tangente vettoriale ad M nel punto $p = (x_0, f(x_0))$ è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{n+1}$ generato dagli n vettori linearmente indipendenti

$$V_i = \Big(\mathrm{e}_i, \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}\Big) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

e precisamente è l'insieme

$$T_p M = \Big\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i V_i \in \mathbb{R}^{n+1} : \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Nel contesto della figura precedente, questo piano è parallelo al piano azzurro, ma passa per il punto 0.

4. Differenziale della funzione composta

In questa sezione proviamo la formula per il differenziale della funzione composta. Nel caso di somma e prodotto di funzioni si hanno i seguenti fatti.

1. Differenziale della somma. Se $f, g : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, sono differenziabili in un punto $x_0 \in A$ allora anche la funzione somma $f + g$ è differenziabile in x_0 e inoltre

$$d(f + g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0).$$

La verifica è elementare.

2. Differenziale del prodotto. Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, funzioni differenziabili in un punto $x_0 \in A$. Allora anche la funzione prodotto $f \cdot g$ è differenziabile in x_0 e inoltre

$$d(f \cdot g)(x_0) = f(x_0) dg(x_0) + g(x_0) df(x_0).$$

La verifica è elementare e si ottiene moltiplicando gli sviluppi

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + F_{x_0}(x) \\ g(x) &= g(x_0) + dg(x_0)(x - x_0) + G_{x_0}(x), \end{aligned}$$

con $F_{x_0}(x) = o(|x - x_0|)$ e $G_{x_0}(x) = o(|x - x_0|)$ per $x \to x_0$.

Teorema 6.20 (Differenziale della funzione composta). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile nel punto $x_0 \in A$. Sia poi $B \subset \mathbb{R}^m$ un insieme aperto tale che $f(A) \subset B$ e sia $g : B \to \mathbb{R}^k$ una funzione differenziabile nel punto $f(x_0) \in B$. Allora la funzione composta $g \circ f : A \to \mathbb{R}^k$ è differenziabile nel punto x_0 e inoltre

$$d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0). \tag{6.6}$$

Equivalentemente, le matrici Jacobiane verificano

$$\underbrace{J_{g\circ f}(x_0)}_{k\times n} = \underbrace{J_g(f(x_0))}_{k\times m} \underbrace{J_f(x_0)}_{m\times n}, \tag{6.7}$$

con la notazione di prodotto fra matrici righe$\times$colonne.

Dim. Per il Teorema 6.14, avremo

$$f(x) = f(x_0) + T(x - x_0) + F_{x_0}(x), \quad x \in A,$$

con $T = df(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ed $F_{x_0} : A \to \mathbb{R}^m$ tale che $F_{x_0}(x) = o(|x - x_0|)$ per $x \to x_0$. Inoltre, posto $y_0 = f(x_0)$, avremo

$$g(y) = g(y_0) + S(y - y_0) + G_{y_0}(y), \quad y \in B,$$

con $S = dg(y_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$ ed $G_{y_0} : B \to \mathbb{R}^k$ tale che $G_{y_0}(y) = o(|y - y_0|)$ per $y \to y_0$.

Componendo f con g si trova

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(x_0)) + S(f(x) - f(x_0)) + G_{f(x_0)}(f(x)) \\ &= g(f(x_0)) + S(T(x - x_0) + F_{x_0}(x)) + G_{f(x_0)}(f(x)) \\ &= g(f(x_0)) + S(T(x - x_0)) + S(F_{x_0}(x)) + G_{f(x_0)}(f(x)). \end{aligned}$$

Abbiamo usato la linearità di S.

Chiaramente si ha $S \circ T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^k)$. Consideriamo la funzione $H_{x_0} : A \to \mathbb{R}^k$

$$H_{x_0}(x) = S(F_{x_0}(x)) + G_{f(x_0)}(f(x)).$$

Da un lato avremo, per $x \to x_0$,

$$S(F_{x_0}(x)) = o(|x - x_0|),$$

e dall'altro, siccome $x \to x_0$ implica $f(x) \to f(x_0)$ (la differenziabilità implica la continuità), per $f(x) \neq f(x_0)$ avremo

$$\frac{G_{f(x_0)}(f(x))}{|x - x_0|} = \frac{|T(x - x_0) + E_{x_0}(x)|}{|x - x_0|} \frac{G_{f(x_0)}(f(x))}{|f(x) - f(x_0)|} = o(1), \quad x \to x_0.$$

Quando $f(x) = f(x_0)$, è semplicemente $G_{f(x_0)}(f(x)) = 0$.

In conclusione, $H_{x_0}(x) = o(|x - x_0|)$ per $x \to x_0$. Per il Teorema 6.14, $g \circ f$ è differenziabile in x_0 con differenziale $d(g \circ f)(x_0) = S \circ T = dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$.

□

Esempio 6.21 (Derivata di una funzione lungo una curva). Sia $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ una curva derivabile (equivalentemente, differenziabile) in tutti i punti. Coerentemente con la convenzione fissata in (6.1), pensiamo γ come un vettore colonna

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1].$$

Sia poi $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile (in tutti i punti lungo la curva). Allora avremo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) &= J_{f \circ \gamma}(t) = J_f(\gamma(t)) J_\gamma(t) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t)) \Big) \begin{pmatrix} \dot\gamma_1(t) \\ \vdots \\ \dot\gamma_n(t) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \dot\gamma_i(t). \end{aligned}$$

Con una notazione più compatta possiamo anche scrivere

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle, \quad t \in [0,1]. \tag{6.8}$$

Esempio 6.22. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile nell'aperto $A \subset \mathbb{R}^n$. Fissato un parametro $t \in \mathbb{R}$, l'insieme

$$M_t = \big\{x \in A : f(x) = t\big\}$$

sia dice insieme di livello t della funzione f. Sia $x_0 \in M_t$ per un fissato t. Sia $\gamma : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^n$ una curva derivabile tale che $\gamma(s) \in M_t$ per ogni $s \in (-\delta, \delta)$ e $\gamma(0) = x_0$. Allora si ha

$$0 = \frac{d}{ds} f(\gamma(s)) = \langle \nabla f(\gamma(s)), \dot\gamma(s)\rangle,$$

ed in particolare $\langle \nabla f(x_0), \dot\gamma(0)\rangle = 0$. Questo significa che $\nabla f(x_0)$ è ortogonale a tutte le direzioni tangenti ad M_t nel punto $x_0 \in M_t$.

Esempio 6.23. Esplicitiamo la formula (6.7) del Teorema 6.20. Siano $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ due funzioni differenziabili. La composizione $G = g \circ f$ ha k componenti $G = (G_1, \dots, G_k)$, da pensare come vettore colonna. La formula (6.7), ovvero $JG(x) = Jg(f(x))\, Jf(x)$, si legge nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial G_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial G_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial G_k}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial G_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_k}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_k}{\partial y_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

dove le derivate parziali di g vanno calcolate nel punto $f(x)$, quelle di f e G nel punto x. Alla riga $i \in \{1, \dots, k\}$ e colonna $j \in \{1, \dots, n\}$ della matrice $JG(x)$ si trova l'entrata

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_j}(x) = \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_\ell}(f(x)) \frac{\partial f_\ell}{\partial x_j}(x).$$

5. Teoremi del valor medio

In questa sezione estendiamo il Teorema di Lagrange al caso multidimensionale.

Teorema 6.24. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile nell'aperto $A \subset \mathbb{R}^n$, e siano $x, y \in A$ punti tali che $[x, y] := \big\{tx + (1-t)y \in \mathbb{R}^n : t \in [0,1]\big\} \subset A$. Allora esiste un punto $z \in [x, y]$ tale che

$$f(x) - f(y) = \langle \nabla f(z), x - y\rangle. \tag{6.9}$$

Dim. Sia $\gamma : [0,1] \to A$, $\gamma(t) = tx + (1-t)y$ una parametrizzazione del segmento, e definiamo la funzione composta $\varphi = f \circ \gamma$, ovvero

$$\varphi(t) = f(tx + (1-t)y) = f(\gamma(t)), \quad t \in [0,1].$$

Avremo $\varphi(1) = f(x)$ e $\varphi(0) = f(y)$, ed inoltre $\dot\gamma(t) = x - y$ per ogni $t \in [0,1]$. Per il Teorema 6.20, φ è differenziabile su $[0,1]$, e quindi per il Teorema di Lagrange esiste un punto $t^* \in [0,1]$ tale che $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t^*)$. Per la formula (6.8),

$$\varphi'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle, \quad t \in [0,1].$$

e dunque, posto $z = \gamma(t^*)$, si ottiene la tesi. □

Nel caso di funzioni a valori vettoriali la formulazione del Teorema del valor medio deve essere precisata.

TEOREMA 6.25. Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile nell'aperto $A \subset \mathbb{R}^n$, e siano $x, y \in A$ punti tali che $[x,y] := \big\{tx + (1-t)y \in \mathbb{R}^n : t \in [0,1]\big\} \subset A$. Allora per ogni $v \in \mathbb{R}^m$ esiste un punto $z \in [x,y]$ tale che

$$\langle f(x) - f(y), v\rangle = \langle df(z)(x-y), v\rangle. \tag{6.10}$$

Dim. Sia $\gamma : [0,1] \to A$, $\gamma(t) = tx + (1-t)y$, una parametrizzazione del segmento, e definiamo la funzione composta $\varphi = \langle f \circ \gamma, v\rangle$ ovvero

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^m f_i(tx + (1-t)y)v_i, \quad t \in [0,1].$$

Per la formula della della derivata della funzione composta si trova

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^m \frac{d}{dt} f_i(\gamma(t))v_i = \sum_{i=1}^m \langle \nabla f_i(\gamma(t)), x - y\rangle v_i = \langle df(\gamma(t))(x-y), v\rangle.$$

Abbiamo omesso i conti che provano l'ultima identità.

Per il Teorema 6.20, φ è differenziabile su $[0,1]$, e quindi per il Teorema di Lagrange esiste un punto $t^* \in [0,1]$ tale che $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t^*)$. Dunque, posto $z = \gamma(t^*)$, si ottiene la tesi.

□

Ci serve ora la definizione di norma di una trasformazione lineare.

DEFINIZIONE 6.26. La norma di una trasformazione lineare $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ è il numero reale

$$\|T\| = \sup_{|x|\le 1} |Tx|,$$

dove l'estremo superiore è fatto su tutti i punti $x \in \mathbb{R}^n$ tali che $|x| \le 1$. Su $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}^m$ si considerano le norme standard.

Siccome l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le 1\}$ è compatto l'estemo superiore è in effetti un massimo e quindi certamente si ha $\|T\| \in \mathbb{R}$. Se poi $x \in \mathbb{R}^n$ è un punto qualsiasi vale la disuguaglianza

$$|Tx| \le \|T\||x|. \tag{6.11}$$

COROLLARIO 6.27. Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile nell'aperto $A \subset \mathbb{R}^n$, e siano $x, y \in A$ punti tali che $[x,y] := \big\{tx + (1-t)y \in \mathbb{R}^n : t \in [0,1]\big\} \subset A$. Allora esiste un punto $z \in [x,y]$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \le \|df(z)\||x-y|, \tag{6.12}$$

dove $\|df(z)\|$ è la norma di $df(z) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Dim. Per ogni $v \in \mathbb{R}^m$ esiste $z \in [x,y]$ che rende vera l'identità (6.10). Scegliamo $v = f(x) - f(y)$ e, usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e la (6.11), otteniamo

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)|^2 &= \langle df(z)(x-y), f(x) - f(y) \rangle \\ &\leq |df(z)(x-y)||f(x) - f(y)| \\ &\leq \|df(z)\||x-y||f(x) - f(y)|. \end{aligned}$$

Se $|f(x) - f(y)| = 0$ la tesi è banalmente verificata. Possiamo dunque dividere per $|f(x) - f(y)| \neq 0$ e ottenere la tesi. $\square$

Corollario 6.28. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto convesso e sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile in A tale che $\|df(x)\| \leq L < \infty$ per ogni $x \in A$. Allora f è Lipschitziana e $\mathrm{Lip}(f) \leq L$.

La prova segue immediatamente dal corollario precedente.

6. Funzioni di classe C^1

Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto ed $f : A \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, una funzione con coordinate $f = (f_1, \ldots, f_m)$.

Definizione 6.29. Definiamo $C^1(A;\mathbb{R}^m)$ come l'insieme di tutte le funzioni $f : A \to \mathbb{R}^m$ tali che esistano e siano continue in A tutte le derivate parziali

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C(A), \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.$$

Scriveremo anche $C^1(A) = C^1(A;\mathbb{R})$.

Teorema 6.30. Se $f \in C^1(A;\mathbb{R}^m)$ allora f è differenziabile in ogni punto $x_0 \in A$.

Dim. È sufficiente provare il teorema nel caso $m = 1$. Fissato $x_0 \in A$ consideriamo la trasformazione lineare $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$

$$Th = \langle \nabla f(x_0), h \rangle = \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0), \qquad h \in \mathbb{R}^n.$$

Dobbiamo provare che

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Th}{|h|} = 0. \tag{6.13}$$

Partiamo dalla seguente espansione telescopica:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &= f\Big(x_0 + \sum_{i=1}^n h_i \mathrm{e}_i\Big) - f(x_0) \\ &= \sum_{j=1}^n f\Big(x_0 + \sum_{i=1}^j h_i \mathrm{e}_i\Big) - f\Big(x_0 + \sum_{i=1}^{j-1} h_i \mathrm{e}_i\Big). \end{aligned}$$

Dal Teorema del valor medio segue che per ogni $j = 1, \ldots, n$ esiste $h_j^* \in \mathbb{R}$ tale che $|h_j^*| \leq |h_j| \leq |h|$ e si ha

$$f\Big(x_0 + \sum_{i=1}^j h_i \mathrm{e}_i\Big) - f\Big(x_0 + \sum_{i=1}^{j-1} h_i \mathrm{e}_i\Big) = h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\Big(x_0 + \sum_{i=1}^{j-1} h_i \mathrm{e}_i + h_j^* \mathrm{e}_j\Big).$$

Deduciamo che

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-Th}{|h|}=\sum_{j=1}^{n}\frac{h_j}{|h|}\Big[\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big(x_0+\sum_{i=1}^{j-1}h_i\mathrm{e}_i+h_j^*\mathrm{e}_j\Big)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\Big],$$

dove le quantità $h_j/|h|$ rimangono limitate, mentre per la continuità delle derivate parziali si ha per ogni $j=1,\dots,n$:

$$\lim_{h\to 0}\Big[\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big(x_0+\sum_{i=1}^{j-1}h_i\mathrm{e}_i+h_j^*\mathrm{e}_j\Big)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\Big]=0,$$

e la tesi (6.13) segue. □

Osservazione 6.31. Riassumiamo la situazione:

$f\in C^1(A) \quad\Rightarrow\quad f$ differenziabile in $A \quad\Rightarrow\quad f$ derivabile e continua in A.

Tuttavia, f può essere differenziabile in ogni punto di A senza che sia $f\in C^1(A)$. Questo fatto è già vero in dimensione $n=1$.

7. Teorema di Rademacher

In questa sezione accenniamo ad alcuni teoremi sulla differenziabilità delle funzioni Lipschitziane. Premettiamo la nozione di insieme di misura nulla in $\mathbb{R}^n$.

Un plurirettangolo di $\mathbb{R}^n$ è un insieme della forma

$$Q=[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]\subset\mathbb{R}^n,$$

con $-\infty<a_i\le b_i<\infty$ per ogni $i=1,\dots,n$. La *misura* (o volume) del plurirettangolo Q è il numero reale

$$|Q|=(b_1-a_1)\cdot\ldots\cdot(b_n-a_n).$$

Definizione 6.32 (Insieme di misura nulla). Diremo che un insieme $A\subset\mathbb{R}^n$, $n\ge 1$, ha *misura nulla* in $\mathbb{R}^n$ e scriveremo $|A|=0$, se per ogni $\varepsilon>0$ esiste una successione Q_k, $k\in\mathbb{N}$, di plurirettangoli di $\mathbb{R}^n$ tali che

$$A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}Q_k,\quad\text{e}\quad\sum_{k=1}^{\infty}|Q_k|\le\varepsilon.$$

La definizione può essere equivalentemente data usando ricoprimenti di soli cubi oppure di palle.

Esempio 6.33. Mostriamo che $\mathbb{Q}^n\subset\mathbb{R}^n$ ha misura nulla. Essendo l'insieme numerabile, si ha

$$\mathbb{Q}^n=\big\{q_k\in\mathbb{Q}^n : k\in\mathbb{N}\big\}.$$

Per ogni $k\in\mathbb{N}$, sia Q_k il cubo con faccie parallele agli iperpiani coordinati, centrato in q_k e di lato $\varepsilon^{1/n}/2^{k/n}$. Chiaramente

$$\mathbb{Q}^n\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}Q_k,\quad\text{e}\quad\sum_{k=1}^{\infty}|Q_k|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=\varepsilon.$$

Osserviamo, tuttavia, che esistono insiemi di misura nulla con la cardinalità del continuo.

Teorema 6.34 (Lebesgue). Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione monotona. Allora esiste un insieme $A \subset [0,1]$ di misura nulla in $\mathbb{R}$, $|A| = 0$, tale che f è derivabile in tutti i punti di $[0,1] \setminus A$.

La dimostrazione del Teorema di Lebesgue è impegnativa ed è il punto di partenza di vari risultati di Analisi Reale e Teoria della Misura. Si veda ad esempio Kolmogorov-Fomin, *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale*, Mir 1980, p.319. Per le funzioni Lipschitziane (e più in generale per le funzioni a variazione limitata) vale il teorema di Jordan.

Teorema 6.35. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione Lipschitziana (più in generale: una funzione a variazione limitata). Allora esistono due funzioni $\varphi, \psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ monotone tali che $f = \varphi - \psi$.

Siccome l'unione di due insiemi di misura nulla ha ancora misura nulla, dal Teorema di Lebesgue segue che le funzioni Lipschitiane sono derivabili al di fuori di un insieme di misura nulla. L'estensione di questo teorema al caso di funzioni di più variabili è nota come Teorema di Rademacher.

Teorema 6.36 (Rademacher). Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n, m \geq 1$, una funzione Lipschitziana. Allora esiste un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ di misura nulla, $|A| = 0$, tale che f è differenziabile in tutti i punti di $\mathbb{R}^n \setminus A$.

La dimostrazione si basa sul risultato unidimensionale $n = 1$. Si veda Evans-Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, p.81 (ed anche p.235, per una dimostrazione basata sulla teoria degli Spazi di Sobolev).

Esempio 6.37. Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un chiuso. La funzione distanza $f(x) = \mathrm{dist}(x, K)$ è 1-Lipschitziana. Dunque, è differenziabile al di fuori di un insieme di misura nulla.

8. Derivate di ordine superiore. Teorema di Schwarz

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile, ovvero con tutte le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : A \to \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Possiamo allora definire, se esistono, le derivate parziali di ordine 2

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = D_j D_i f = f_{x_i x_j}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Nel caso di indici uguali, scriveremo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

In generale, l'ordine in cui sono calcolate le derivate parziali è rilevante.

Esempio 6.38. Calcoliamo le derivate parziali seconde miste in 0 della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Se $x^2 + y^2 \neq 0$, la derivata parziale di f in x è

$$f_x(x,y) = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2},$$

mentre $f_x(0,0) = 0$. Di conseguenza,

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f_x(0,y) - f_x(0,0)}{y} = -1.$$

D'altra parte, per un evidente argomento di simmetria, si ha

$$f_{yx}(0,0) = 1.$$

Dunque, entrambe le derivate parziali miste in 0 esistono, ma sono diverse:

$$f_{xy}(0) = -1 \neq 1 = f_{yx}(0).$$

Se le derivate parziali seconde miste sono continue, tuttavia, allora coincidono. Precisamente, si ha il seguente teorema:

Teorema 6.39 (Schwarz). Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione con le derivate parziali seconde miste definite in un intorno di $0 \in \mathbb{R}^2$ e continue nel punto 0. Allora si ha

$$f_{xy}(0) = f_{yx}(0).$$

Dim. Definiamo la funzione

$$\Delta(h,k) = f(h,k) - f(h,0) - f(0,k) + f(0,0) = F(h,k) - F(0,k), \quad h,k \in \mathbb{R},$$

dove $F(h,k) = f(h,k) - f(h,0)$. Per il Teorema di Lagrange (o del valor medio) esiste $h^* \in (0,h)$ tale che

$$F(h,k) - F(0,k) = F_x(h^*,k)h = \big(f_x(h^*,k) - f_x(h^*,0)\big)h.$$

Di nuovo per il Teorema del valor medio, esiste $\widehat{k} \in (0,k)$ tale che $f_x(h^*,k) - f_x(h^*,0) = f_{xy}(h^*,\widehat{k})k$. Scegliendo $k = h$, facendo il limite $h \to 0$ e usando la continuità della funzione $(x,y) \to f_{xy}(x,y)$ in $0 \in \mathbb{R}^2$, si trova

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta(h,h)}{h^2} = \lim_{h\to 0} f_{xy}(h^*,\widehat{h}) = f_{xy}(0).$$

In modo analogo, partendo da

$$\Delta(h,k) = f(h,k) - f(0,k) - f(h,0) + f(0,0) = G(h,k) - G(h,0),$$

dove $G(h,k) = f(h,k) - f(0,k)$, si trova per un opportuno $k^* \in (0,k)$ e per un opportuno $\widehat{h} \in (0,h)$

$$\Delta(h,k) = G_y(h,k^*)k = k\big(f_y(h,k^*) - f_y(0,k^*)\big) = khf_{yx}(\widehat{h},k^*),$$

e dunque

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta(h,h)}{h^2} = \lim_{h\to 0} f_{yx}(\widehat{h},h^*) = f_{yx}(0).$$

La tesi segue dall'unicità del limite.

$\square$

Definizione 6.40. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Definiamo $C^2(A)$ come l'insieme di tutte le funzioni $f \in C^1(A)$ tali che esistono e sono continue in A tutte le derivate parziali del secondo ordine

$$D_i D_j f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \in C(A), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

La *matrice Hessiana* di una funzione $f \in C^2(A)$ è la matrice $n \times n$

$$D^2 f(x) = Hf(x) = \big(D_i D_j f(x)\big)_{i,j=1,\dots,n}.$$

Se $f \in C^2(A)$ allora per il Teorema di Schwarz le derivate miste coincidono

$$D_i D_j f = D_j D_i f, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Di conseguenza, la matrice Hessiana è simmetrica.

Definizione 6.41. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, definiamo $C^k(A)$ come l'insieme di tutte le funzioni $f : A \to \mathbb{R}$ tali che esistano e siano continue in A tutte le derivate parziali di ordine k

$$D_{i_1} \cdots D_{i_k} f = \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} \in C(A), \quad i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}.$$

Definiamo quindi l'insieme delle funzioni con derivate parziali continue di ogni ordine

$$C^\infty(A) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(A).$$

Osservazione 6.42. Dal Teorema di Schwarz segue il seguente fatto. Se $f \in C^k(A)$, $k \geq 1$, allora

$$D_{i_1} \dots D_{i_k} f = D_{\sigma(i_1)} \dots D_{\sigma(i_k)} f$$

per ogni permutazione $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ che fissa $\{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$. In altri termini, è possibile scambiare a piacere l'ordine di derivazione.

9. Punti critici. Punti di massimo e minimo locale

In questa sezione presentiamo condizioni necessarie e condizioni sufficienti affinchè una funzione abbia punti di estremo locale.

Definizione 6.43 (Punto di estremo locale). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme.

i) Un punto $x_0 \in A$ si dice punto di *massimo locale* di una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ se esiste $r > 0$ tale che per ogni $x \in B_r(x_0) \cap A$ si ha

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Se $f(x) < f(x_0)$ per ogni $x \in A \cap B_r(x_0) \setminus \{x_0\}$ diremo che x_0 è un punto di *massimo locale stretto.*

ii) Un punto $x_0 \in A$ si dice punto di *minimo locale* di una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ se esiste $r > 0$ tale che per ogni $x \in B_r(x_0) \cap A$

$$f(x) \geq f(x_0).$$

Se $f(x) > f(x_0)$ per ogni $x \in A \cap B_r(x_0) \setminus \{x_0\}$ diremo che x_0 è un punto di *minimo locale stretto.*

I punti critici di una funzione sono i punti dove il gradiente si annulla.

Definizione 6.44 (Punto critico). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme *aperto*. Un punto $x_0 \in A$ si dice *punto critico* di una funzione $f \in C^1(A)$ se $\nabla f(x_0) = 0$.

Prossimo obiettivo è di provare che i punti di estremo locale sono punti critici dove la matrice Hessiana è definita positiva oppure negativa. Abbiamo bisogno della formula di Taylor in più variabili.

Lemma 6.45 (Formula di Taylor del secondo ordine). Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, $x_0 \in A$ ed $f \in C^2(A)$. Allora per ogni $x \in A$ tale che $[x_0, x] \subset A$ esiste un punto $z \in [x_0, x]$ tale che

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(z)(x - x_0), x - x_0 \rangle.$$

Dim. Sia $v = x - x_0$ e definiamo la funzione

$$\varphi(t) = f(x_0 + tv), \quad t \in [0, 1].$$

Chiaramente, $\varphi(0) = f(x_0)$, $\varphi(1) = f(x)$ e inoltre $\varphi \in C^2([0, 1])$. Per la formula dello sviluppo di Taylor nel caso 1-dimensionale per ogni $t \in [0, 1]$ esiste $\tau \in [0, t]$ tale che

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{1}{2}t^2\varphi'(\tau), \tag{6.14}$$

Calcoliamo le derivate di φ. Per la formula della derivata della funzione composta

$$\varphi'(t) = \langle \nabla f(x_0 + tv), v \rangle = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_0 + tv)v_i,$$

e inoltre

$$\varphi''(t) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x_0 + tv)v_i v_j = \langle Hf(x_0 + tv)v, v \rangle.$$

Scegliamo $t = 1$ nella formula (6.14) e sia $\tau \in [0, 1]$ il valore che renda vera la (6.14). Con la scelta $z = x_0 + \tau v$ otteniamo la tesi. □

Osservazione 6.46. Nelle ipotesi del Lemma precedente si ha, con $v = x - x_0$,

$$\begin{aligned}\langle Hf(z)(x - x_0), x - x_0 \rangle &= \langle Hf(x_0)v, v \rangle + \langle [Hf(z) - Hf(x_0)]v, v \rangle \\ &= \langle Hf(x_0)v, v \rangle + o(|v|^2), \quad v = x - x_0 \to 0,\end{aligned}$$

essendo $z \in [x_0, x]$ ed usando la continuità delle derivate parziali seconde.

Definizione 6.47 (Forme quadratiche (semi)definite). Sia B una matrice reale $n \times n$ simmetrica, $B = B^t$.

i) Diremo che B è semidefinita positiva se $\langle Bv, v \rangle \geq 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$. Scriveremo in questo caso $B \geq 0$.
ii) Diremo che B è definita positiva se $\langle Bv, v \rangle > 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$. Scriveremo in questo caso $B > 0$.

Diremo che B è semidefinita negativa se $-B \geq 0$, che è definita negativa se $-B > 0$.

Lemma 6.48. Sia B una matrice reale $n \times n$ simmetrica. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1) $B > 0$, ovvero B è definita positiva;
2) Esiste una costante $m > 0$ tale che $\langle Bv, v \rangle \geq m|v|^2$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$.

Dim. L'implicazione 2)⇒1) è chiara. Proviamo l'implicazione opposta. L'insieme $K = \{v \in \mathbb{R}^n : |v| = 1\}$ è compatto e la funzione $g : K \to \mathbb{R}$, $g(v) = \langle Bv, v\rangle$ è continua. Per il Teorema di Weierstrass esiste $v_0 \in K$ tale che

$$m = \min_{v\in K} g(v) = \langle Bv_0, v_0\rangle > 0.$$

Ora, se $v \in \mathbb{R}^n$ con $v \neq 0$, avremo

$$\Big\langle B\frac{v}{|v|}, \frac{v}{|v|}\Big\rangle \geq m,$$

da cui segue la tesi. □

Osservazione 6.49. Siano $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ gli autovalori della matrice simmetrica B e sia $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ una base ortonormale di autovettori di B, con $Bv_i = \lambda_i v_i$. Allora per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ avremo

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i,$$

con $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Dunque, si trova

$$\langle Bx, x\rangle = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i\alpha_j\langle Bv_i, v_j\rangle = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i\alpha_j\lambda_i\langle v_i, v_j\rangle = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i^2\lambda_i.$$

Da questa formula deduciamo che si ha:
1) $B \geq 0$ se e solo se $\lambda_1 \geq 0$;
2) $B > 0$ se e solo se $\lambda_1 > 0$.
In effetti, risulta

$$\lambda_1 = \min_{|v|=1}\langle Bv, v\rangle.$$

Questo fatto si può provare col teorema dei moltiplicatori di Lagrange.

Osservazione 6.50. Quando B è una matrice 2×2, il segno di B si determina facilmente guardando la traccia e il determinante di B. Ad esempio:

1) $B \geq 0$ se e solo se $\det(B) = \lambda_1\lambda_2 \geq 0$ e $\mathrm{tr}(B) = \lambda_1 + \lambda_2 \geq 0$.
2) $B < 0$ se e solo se $\det(B) = \lambda_1\lambda_2 > 0$ e $\mathrm{tr}(B) = \lambda_1 + \lambda_2 \leq 0$.
3) Se invece $\det(B) < 0$ allora B non è definita (non ha un segno).

Possiamo provare ora le condizioni necessarie di estremalità, ad esempio nel caso dei minimi locali.

Teorema 6.51 (Condizioni necessarie di estremalità). Sia $x_0 \in A$, con $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, un punto di minimo locale di una funzione $f \in C^2(A)$. Allora:
i) $\nabla f(x_0) = 0$ (condizione necessaria del primo ordine).
ii) $Hf(x_0) \geq 0$ (condizione necessaria del secondo ordine).

Dim. i) Esiste $r > 0$ tale $B_r(x_0) \subset A$ ed $f(x) \geq f(x_0)$ per $x \in B_r(x_0)$. Per $t \in \mathbb{R}$ con $|t| < r$ avremo $x_0 + te_i \in B_r(x_0)$; inoltre,

$$\frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} \geq 0 \quad \text{per } t > 0,$$

e

$$\frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} \leq 0 \quad \text{per } t < 0.$$

Passando al limite per $t \to 0$ si ottengono le disuguaglianze

$$f_{x_i}(x_0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} \geq 0,$$

$$f_{x_i}(x_0) = \lim_{t\to 0^-} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} \leq 0,$$

da cui si deduce che $f_{x_i}(x_0) = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

ii) Dalla formula di Taylor del secondo ordine con resto di Peano e dal fatto che $\nabla f(x_0) = 0$, per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$ sufficientemente piccolo si ha la disuguaglianza

$$0 \leq f(x_0 + tv) - f(x_0) = \frac{t^2}{2}\langle Hf(x_0)v, v\rangle + o(t^2).$$

Dividendo per $t^2 > 0$ e facendo poi il limite per $t \to 0$ si deduce che

$$\langle Hf(x_0)v, v\rangle \geq 0.$$

□

Teorema 6.52 (Condizioni sufficienti per la minimalità locale). Siano $x_0 \in A$, $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, ed $f \in C^2(A)$. Supponiamo che:

i) $\nabla f(x_0) = 0$;
ii) $Hf(x_0) > 0$.

Allora x_0 è un punto di minimo locale stretto di f.

Dim. Sia $r > 0$ tale che $B_r(x_0) \subset A$, da fissare in modo definitivo in seguito. La funzione f ha lo sviluppo di Taylor

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}\langle Hf(x_0)(x - x_0), x - x_0\rangle + o(|x - x_0|^2), \quad x \to x_0.$$

Abbiamo usato il fatto che $\nabla f(x_0) = 0$. Sia $m > 0$ la costante data dal Lemma 6.48. Allora

$$\frac{1}{2}\langle Hf(x_0)(x - x_0), x - x_0\rangle + o(|x - x_0|^2) \geq |x - x_0|^2\Big(\frac{m}{2} + o(1)\Big),$$

dove $o(1)$ è una funzione in x infinitesima per $x \to x_0$. Dunque esiste $r > 0$ tale che per $x \in B_r(x_0)$

$$\frac{m}{2} + o(1) \geq \frac{m}{4}.$$

Di conseguenza, se $0 < |x - x_0| < r$ si ha

$$f(x) - f(x_0) \geq |x - x_0|^2\Big(\frac{m}{2} + o(1)\Big) \geq \frac{m}{4}|x - x_0|^2 > 0.$$

Questo prova che x_0 è un punto di minimo locale stretto.

□

10. Funzioni convesse

Un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice *convesso* se per ogni coppia di punti $x, y \in A$ si ha

$$[x,y] = \big\{tx + (1-t)y \in \mathbb{R}^n : t \in [0,1]\big\} \subset A.$$

Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice *convessa* se per ogni $x, y \in A$ e $t \in [0,1]$ si ha

$$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y).$$

La funzione si dice *strettamente convessa* se per ogni $x, y \in A$ con $x \neq y$, e per ogni $t \in (0,1)$ si ha la disuguaglianza stretta

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y).$$

La nozione di insieme convesso si formula in modo naturale negli spazi vettoriali. La nozione di funzione convessa si formula in modo naturale per funzioni a valori reali definite in un insieme convesso di uno spazio vettoriale.

Omettiamo la dimostrazione della seguente proposizione.

Proposizione 6.53. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme convesso e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

A) f è convessa;
B) l'epigrafico di f

$$\mathrm{epi}(f) = \big\{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in A,\, x_{n+1} > f(x)\big\}$$

è un insieme convesso in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Anche la dimostrazione del seguente fatto è omessa.

Proposizione 6.54. Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme convesso ed $f \in C(A)$ una funzione continua. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

A) f è convessa;
B) Per ogni coppia di punti $x, y \in A$ si ha

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y).$$

La dimostrazione della parte non banale B)⇒A) si basa sull'approssimazione di un generico $t \in [0,1]$ con successioni "diadiche" e su un'applicazione iterata della convessità del punto medio.

Richiamiamo, infine, il seguente teorema sulle funzioni convesse in dimensione $n = 1$.

Proposizione 6.55. Sia $\varphi : I \to \mathbb{R}$, con $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallo, una funzione convessa. Allora:

i) Per ogni $y \in I$, la funzione

$$x \mapsto \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y}, \quad x \in I \setminus \{y\}, \tag{6.15}$$

è crescente.

ii) Per ogni $a < \alpha < \beta < b$, φ è Lipschitziana su $[\alpha, \beta]$.

Vogliamo estendere questo teorema a dimensione generica $n \geq 1$. Per ogni $r > 0$ definiamo il cubo chiuso centrato in $0 \in \mathbb{R}^n$ di semilato $r > 0$

$$Q_r = \big\{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq r,\, i = 1, \dots, n\big\}.$$

Teorema 6.56. Siano $0 < r < R$ e sia $f : Q_R \to \mathbb{R}$ una funzione convessa, $Q_R \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Allora esiste una costante $L \geq 0$ tale che per ogni $x, y \in Q_r$ si ha

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Dim. Diamo la dimostrazione nel caso $n = 2$. Dalla Proposizione 6.55, parte ii), segue che $f \in C(\partial Q_r)$ e quindi esiste finito il minimo

$$m = \min_{x \in \partial Q_r} f(x) \in \mathbb{R}.$$

Inoltre, detti q_i, $i = 1, 2, 3, 4$, i quattro vertici del quadrato Q_R (i "punti estremali" di Q_R), dalla convessità di f segue che per ogni $x \in Q_R$ si ha $f(x) \leq \max\{f(q_i) : i = 1, 2, 3, 4\}$. Dunque esiste finito anche il seguente massimo

$$M = \max_{x \in \partial Q_R} f(x) = \max\{f(q_i) : i = 1, 2, 3, 4\}.$$

Dati $x, y \in Q_r$ con $x \neq y$, consideriamo la semiretta $L_{xy} = \big\{y + t(x - y) \in \mathbb{R}^n : t \geq 0\big\}$. Siano $\bar{x} \in \partial Q_R$ e $\bar{y} \in \partial Q_r$ punti tali che

$$L_{xy} \cap \partial Q_R = \{\bar{x}\}, \quad L_{xy} \cap \partial Q_r = \{\bar{y}\}.$$

Il punto $\bar{x}$ è definito in modo unico. Il punto $\bar{y}$ è definito in modo unico se x, y non sono su uno stesso lato di ∂Q_r. Usando due volte la monotonia (6.15), deduciamo che

$$\frac{f(x) - f(y)}{|x - y|} \leq \frac{f(\bar{x}) - f(y)}{|\bar{x} - y|} \leq \frac{f(\bar{x}) - f(\bar{y})}{|\bar{x} - \bar{y}|} \leq \frac{M - m}{R - r} = L.$$

Scambiando il ruolo di x ed y, otteniamo la tesi

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq L, \quad x, y \in Q_r,\, x \neq y.$$

□

Corollario 6.57. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto convesso e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Allora esiste un insieme $E \subset A$ di misura nulla, $|E| = 0$, tale che f è differenziabile in ogni punto di $A \setminus E$.

Questo corollario segue dal Teorema di Rademacher e dal fatto che un aperto di $\mathbb{R}^n$ è un unione numerabile di cubi chiusi. Omettiamo i dettagli.

Caratterizziamo ora le funzioni convesse di classe $C^1(A)$ e di classe $C^2(A)$. Premettiamo la seguente osservazione. Se A è convesso e $x, y \in A$, allora l'insieme

$$I_{xy} = \{t \in \mathbb{R} : y + t(x - y) \in A\}$$

è un intervallo. Inoltre, una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è convessa se e solo se sono convesse le funzioni $\varphi_{xy} : I_{xy} \to \mathbb{R}$, $\varphi_{xy}(t) = f(y + t(x - y))\}$, per ogni $x, y \in A$.

Teorema 6.58. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto convesso e sia $f \in C^1(A)$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

A) f è convessa;

B) Per ogni $x, y \in A$ si ha $f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y\rangle$;
C) Per ogni $x, y \in A$ si ha $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y\rangle \geq 0$.

L'affermazione C) si può riassumere dicendo che l'applicazione $x \mapsto \nabla f(x)$è monotona (crescente).

Dim. A)$\Rightarrow$B). Siano $x, y \in A$. Dalla convessità di f deduciamo che per ogni $t \in (0, 1]$ si ha

$$\frac{f(y + t(x - y)) - f(y)}{t} \leq f(x) - f(y).$$

Passando al limite per $t \to 0^+$ e usando la regola per la derivata della funzione composta si ottiene la tesi.

B)$\Rightarrow$C) Basta sommare membro a membro le disuguaglianze

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y\rangle$$
$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle$$

e poi semplificare.

C)$\Rightarrow$A) Consideriamo la funzione

$$\varphi_{xy}(t) = f(y + t(x - y)), \quad t \in I_{xy}.$$

Se proviamo che $t \mapsto \varphi'_{xy}(t)$ è crescente, segue che φ_{xy} è convessa. E dunque, f sarà convessa. Siano $s < t$, $z_t = y + t(x - y)$ e $z_s = y + s(y - x)$. Avremo allora

$$\varphi'_{xy}(t) - \varphi'_{xy}(s) = \langle \nabla f(z_t) - \nabla f(z_s), x - y\rangle \geq 0$$

in quando $y - x$ è un multiplo positivo di $z_t - z_s = (t - s)(x - y)$.

□

TEOREMA 6.59. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto convesso e sia $f \in C^2(A)$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

A) f è convessa;
B) $Hf(x) \geq 0$ per ogni $x \in A$.

Dim. A)$\Rightarrow$B) Fissati $x \in A$ e $v \in \mathbb{R}^n$, la funzione $t \mapsto \varphi(t) = f(x+tv)$ è convessa, e quindi $\varphi''(t) \geq 0$. In particolare, in $t = 0$ si trova

$$0 \leq \varphi''(0) = \langle Hf(x)v, v\rangle,$$

e quindi $Hf(x) \geq 0$.

B)$\Rightarrow$A). Dalla formula per lo sviluppo di Taylor di f, sappiamo che per ogni $x, y \in A$ esiste $z \in [x, y]$ tale che

$$f(x) = f(y) + \langle \nabla f(y), x - y\rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(z)(x - y), x - y\rangle \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y\rangle.$$

Questo termina la prova del Teorema. □

OSSERVAZIONE 6.60. La convessità è importante nello studio dei problemi di minimo.

1) Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto convesso ed $f \in C^1(A)$ una funzione convessa. Se $x_0 \in A$ è un punto critico di f, allora è un punto di minimo globale (assoluto).

2) Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme convesso ed $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione *strettamente* convessa. Se f ha un punto di minimo allora questo è unico.

Concludiamo lo studio delle funzioni convesse enunciando il Teorema di Alexandrov. Per una prova si veda Evans-Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, p.242.

TEOREMA 6.61 (Alexandrov). Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Allora esistono funzioni $f_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i, j = 1, \dots, n$, ed un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ di misura nulla, $|E| = 0$, tali che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus E$ si ha, per $x \to x_0$,

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(x_0)(x - x_0), x - x_0 \rangle + o(|x - x_0|^2),$$

dove $Hf(x_0) = (f_{ij}(x_0))_{i,j=1,\dots,n}$ è la matrice Hessiana generalizzata di f. Inoltre, la matrice $Hf(x_0)$ è simmetrica.

11. Esercizi con soluzione

ESERCIZIO 6.1. Calcolare tutti gli $m, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ tali che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ così definita

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^m y^n}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \tag{6.16}$$

1) abbia tutte le derivate direzionali in $0 \in \mathbb{R}^2$;
2) sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

Soluzione. 1) Sia $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ una direzione $v \neq 0$. Allora

$$f(tv) - f(0) = t^{m+n-2} \frac{v_1^m v_2^n}{v_1^2 + v_2^2},$$

e dunque

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(tv) - f(0)}{t} = \lim_{t \to 0} t^{m+n-3} \frac{v_1^m v_2^n}{v_1^2 + v_2^2} = \begin{cases} 0, & \text{se } m + n > 3 \\ \dfrac{v_1^m v_2^n}{v_1^2 + v_2^2}, & \text{se } m + n = 3. \end{cases}$$

Dunque, esistono tutte le derivate direzionali se e solo se $m + n \geq 3$.

2) Quando $m + n = 3$, l'applicazione $v \mapsto f_v(0)$ non è lineare e dunque f non può essere differenziabile in 0. Nel caso $m + n > 3$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0,$$

e dunque dobbiamo studiare il limite per $(x, y) \to 0 \in \mathbb{R}^2$ del quoziente

$$\frac{f(x, y) - f(0) - \langle \nabla f(0), (x, y) \rangle}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x^m y^n}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = (*).$$

Con le coordinate polari $x = r \cos\vartheta$ e $y = r \sin\vartheta$ si trova

$$|(*)| = r^{m+n-3} |\cos\vartheta|^m |\sin\vartheta|^n \leq r^{m+n-3},$$

con maggiorazione *indipendente da* ϑ. Questo prova che

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0) - \langle \nabla f(0), (x, y) \rangle}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

e con ciò la differenziabilità di f in 0 quando $m + n > 3$. □

Esercizio 6.2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^4+y^6} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Provare che f è continua su $\mathbb{R}^2$.
2) Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$.

Soluzione. 1) Certamente risulta $f \in C(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ in quanto su tale insieme f è quoziente di funzioni continue e il denominatore non si annulla. Controlliamo la continuità nel punto $(0,0)$. Abbiamo le disuguaglianze:

$$|f(x,y)| \leq \frac{|x|^3|y|^2}{x^4+y^6} \leq \frac{(x^4+y^6)^{3/4}(x^4+y^6)^{1/3}}{x^4+y^6} = (x^4+y^6)^{\frac{1}{12}}.$$

Dal momento che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^4+y^6)^{\frac{1}{12}} = 0,$$

per confronto si ottiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

Questo prova la continuità di f in $(0,0)$.

2) Le derivate parziali di f nel punto $(0,0)$ esistono e valgono

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0.$$

Per definizione, la funzione f è differenziabile in $(0,0)$ se il seguente limite esiste ed è zero:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0), (x,y) \rangle}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}(x^4+y^6)}.$$

Esaminiamo il limite per $x \to 0$ della funzione $g(x,y) = \frac{x^3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}(x^4+y^6)}$ lungo una retta della forma $y = mx$, con $m \in \mathbb{R}$:

$$g(x,mx) = \frac{tm^2}{|t|\sqrt{1+m^2}(1+m^6t^2)}.$$

Questa funzione ha limite per $t \to 0$ solo nel caso $m = 0$. Quindi il limite di $g(x,y)$ per $(x,y) \to (0,0)$ non esiste. Di conseguenza, la funzione f non è differenziabile in $(0,0)$.

□

Esercizio 6.3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione così definita:

$$f(x,y) = \left(x^3+y^3\right)^{1/3}.$$

1) Studiare la continuità di f in $\mathbb{R}^2$
2) Calcolare, se esistono, le derivate parziali e direzionali di f nel punto $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.
3) Stabilire se f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$.

Soluzione. Se n è un numero naturale dispari la funzione radice n-esima $t \mapsto \sqrt[n]{t} \in \mathbb{R}$ è una funzione continua da $\mathbb{R}$ in se stesso. Ricordando che la somma di funzioni continue è continua, segue immediatamente che la funzione $f(x, y) = (x^n + y^n)^{1/n}$ è continua su $\mathbb{R}^2$, essendo composizione di funzioni continue.

Sia ora $n = 3$. Calcoliamo le derivate parziali in $(0, 0)$. Usando la definizione, si ottiene

$$f_x(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(t^3)^{1/3}}{t} = 1$$
$$f_y(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(t^3)^{1/3}}{t} = 1.$$

Calcoliamo ora tutte le derivate direzionali nell'origine. Dato un vettore $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ si ha, per definizione,

$$f_v(0,0) = \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2)}{t} = f(v_1, v_2) = \left(v_1^3 + v_2^3\right)^{1/3}. \tag{6.17}$$

Si osservi che f è 1-omogenea, ovvero $f(tv) = tf(v)$ per ogni $v \in \mathbb{R}^2$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Esaminiamo la differenziabilità nell'origine. Ricordiamo il seguente teorema: una funzione f differenziabile in un punto $p \in \mathbb{R}^n$ ha derivate direzionali in ogni direzione $v \in \mathbb{R}^n$ e inoltre $f_v(p) = \langle \nabla f(p), v\rangle$.

Nel caso in esame, se f fosse differenziabile in $(0, 0)$ si dovrebbe avere per ogni $v \in \mathbb{R}^2$

$$\left(v_1^3 + v_2^3\right)^{1/3} = f_v(0,0) = \langle \nabla f(0,0), v\rangle = v_1 + v_2.$$

Ma questo non è vero. Dunque, f non è differenziabile in $(0, 0)$.

□

Esercizio 6.4. Consideriamo la superficie n-dimensionale

$$M = \left\{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1}^2 - |x|^2 = 1\right\}.$$

Calcolare il piano tangente in un generico punto di M.

Soluzione. M è un iperboloide di rotazione a due falde. Consideriamo le due funzioni $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt{1 + |x|^2}, \quad g(x) = -\sqrt{1 + |x|^2}.$$

Allora $M = \mathrm{gr}(f) \cup \mathrm{gr}(g)$.

Calcoliamo il piano tangente ad M nel punto $(x_0, f(x_0)) \in \mathrm{gr}(f)$. Il gradiente di f in x_0 è

$$\nabla f(x_0) = \frac{x_0}{\sqrt{1 + |x_0|^2}}.$$

Il piano tangente (affine) è il grafico della funzione

$$\varphi(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0\rangle = \sqrt{1 + |x_0|^2} + \frac{\langle x_0, x - x_0\rangle}{\sqrt{1 + |x_0|^2}} = \frac{1 + \langle x_0, x\rangle}{\sqrt{1 + |x_0|^2}},$$

e precisamente

$$\mathrm{gr}(\varphi) = \left\{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = \frac{1 + \langle x_0, x\rangle}{\sqrt{1 + |x_0|^2}}\right\}.$$

In particolare, un'equazione cartesiana per questo piano tangente affine è

$$\sqrt{1+|x_0|^2}x_{n+1} - \langle x_0, x\rangle = 1.$$

□

Esercizio 6.5. Siano $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funzioni tali che $f(0) = g(0) = 0$ e, per $x^2 + y^2 \neq 0$,

$$f(x,y) = x \sin\Big(\frac{|y|^\alpha}{x^4+y^2}\Big), \quad g(x,y) = \frac{x|y|^\beta}{x^2+y^4},$$

dove $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ sono parametri.

1) Calcolare tutti gli α tali che f sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.
2) Calcolare tutti i β tali che g sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.
3) Calcolare tutti i $\gamma > 0$ tali che

$$(L) \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\Big(\frac{|y|^\gamma}{x^2+y^4}\Big) = 0.$$

Soluzione. Le derivate parziali di f e g in 0 sono

$$f_x(0) = f_y(0) = 0, \quad g_x(0) = g_y(0) = 0.$$

1) Dobbiamo determinare tutti gli $\alpha > 0$ tali che

$$(*) \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\Big(\frac{|y|^\alpha}{x^4+y^2}\Big) = 0.$$

Usando la disuguaglianza $|\sin(t)| \le |t|$ si ottiene

$$\Big|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\Big(\frac{|y|^\alpha}{x^4+y^2}\Big)\Big| \le \frac{|y|^\alpha}{x^4+y^2} \le |y|^{\alpha-2}.$$

Dunque, per confronto, quando $\alpha > 2$ il limite $(*)$ è 0 e la funzione f è differenziabile in 0.

Supponiamo ora che $\alpha \le 2$. Con la scelta $x = y > 0$ si trova

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\Big(\frac{|y|^\alpha}{x^4+y^2}\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\Big(\frac{x^{\alpha-2}}{x^2+1}\Big) = \varphi(x),$$

e, per $\alpha \le 2$, $\varphi(x)$ non tende a 0 per $x \to 0^+$. Quindi, per $\alpha \le 2$ la funzione f non è differenziabile in 0.

2) Dobbiamo determinare tutti i $\beta > 0$ tali che

$$(**) \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x|y|^\beta}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^4)} = 0.$$

Maggioriamo la funzione nel seguente modo:

$$\Big|\frac{x|y|^\beta}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^4)}\Big| \le \frac{|x||y|^{\beta-1}}{x^2+y^4}.$$

Con la sostituzione $y^2 = z$ prima e con le coordinate polari $x = r\cos(\vartheta)$ e $z = r\sin(\vartheta)$ poi, si trova

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x||y|^{\beta-1}}{x^2+y^4} = \lim_{(x,z)\to(0,0)} \frac{|x||z|^{(\beta-1)/2}}{x^2+z^2} = \lim_{r\to0^+} r^{(\beta-1)/2-1}|\sin\vartheta|^{(\beta-1)/2},$$

e quando $\beta > 3$ l'ultimo limite è 0 (uniformemente in ϑ). Dunque, per $\beta > 3$ la funzione g è differenziabile in 0.

Supponiamo ora che sia $\beta \le 3$. Esaminiamo il limite $(**)$ con la restrizione $x = y^2$ ed $y > 0$. Avremo

$$\frac{x|y|^\beta}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^4)} = \frac{y^{\beta-3}}{2\sqrt{y^2+1}},$$

e quando $\beta \le 3$ l'ultima funzione non converge a 0 per $y \to 0^+$. Quindi per $\beta \le 3$ la funzione g non è differenziabile in 0.

3) Dalla discussione del punto 2) e dalla maggiorazione

$$\Big|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\Big(\frac{|y|^\gamma}{x^2+y^4}\Big)\Big| \le \frac{|x||y|^\gamma}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^4)}$$

si deduce che il limite (L) è 0 per $\gamma > 3$. Vogliamo mostrare che in realtà il limite è 0 se e solo se $\gamma > 2$.

Fissiamo un numero $0 < \sigma < 1$ da determinare in seguito in dipendenza da $\gamma > 2$. Prendiamo un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ in un intorno dell'origine e distinguiamo due casi: i) $|x| \le |y|^{1+\sigma}$; ii) $|x| \ge |y|^{1+\sigma}$. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Nel caso i) abbiamo la stima

$$\Big|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\Big(\frac{|y|^\gamma}{x^2+y^4}\Big)\Big| \le \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le |y|^\sigma < \varepsilon$$

se e solo se $|y| < \varepsilon^{1/\sigma}$. Nel caso ii) abbiamo $x^2 \ge |y|^{2(1+\sigma)}$ e quindi

$$\Big|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\Big(\frac{|y|^\gamma}{x^2+y^4}\Big)\Big| \le \frac{|y|^\gamma}{x^2+y^4} \le \frac{|y|^\gamma}{|y|^{2(1+\sigma)}} = |y|^{\gamma-2(1+\sigma)} < \varepsilon$$

se e solo $|y| < \varepsilon^{1/\lambda}$, dove si ha $\lambda = \gamma - 2(1+\sigma) > 0$ su scelta opportuna di

$$\sigma \in \Big(0, \frac{\gamma}{2} - 1\Big).$$

Questa scelta è possibile perchè $\gamma > 2$. Ciò prova che il limite (L) è 0 quando $\gamma > 2$.

Per $\gamma \le 2$ il limite non è 0. Per provare questo fatto basta esaminare il limite (L) con la restrizione $x = y$. □

Esercizio 6.6. Sia $\alpha > 0$ un parametro fissato e si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita nel seguente modo

$$f(x,y) = \begin{cases} |y|^\alpha \sin\Big(\dfrac{x}{y}\Big), & y \ne 0, \\ 0 & y = 0. \end{cases}$$

Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che:

i) f sia differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$;
ii) le derivate parziali di f siano continue nel punto $0 \in \mathbb{R}^2$.
iii) f sia di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

Soluzione. i) Quando $\alpha \le 1$, la funzione $y \mapsto |y|^\alpha$ non è derivabile nel punto $y = 0$. Dunque, per $\alpha \le 1$ la funzione f non è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$ in quanto non ha la derivata parziale in y nei punti in cui $y = 0$ e $x \ne 0$.

Nell'insieme in cui $y \ne 0$, la funzione f è di classe C^∞, essendo prodotto e composizione di funzioni C^∞. In questo insieme f è differenziabile.

Affermiamo che, per $\alpha > 1$, f è differenziabile anche nei punti $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^2$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$. In questi punti, le derivate parziali di f sono

$$\begin{aligned} f_x(x_0, 0) &= 0, \\ f_y(x_0, 0) &= \lim_{y \to 0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, 0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{|y|^\alpha}{y} \sin\Big(\frac{x_0}{y}\Big) = 0. \end{aligned}$$

Proviamo che f è differenziabile nel generico punto $(x_0, 0)$:

$$\Big| \frac{f(x, y) - f(x_0, 0) - \langle \nabla f(x_0, 0), (x - x_0, y) \rangle}{\sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}} \Big| = \frac{|y|^\alpha}{\sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}} \Big| \sin\Big(\frac{x}{y}\Big) \Big| \leq |y|^{\alpha - 1},$$

e la funzione a destra tende a 0 per $y \to 0$ (indipendentemente da x).

Conclusione: f è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$ se e solo se $\alpha > 1$.

ii) Per il punto precedente, possiamo restringerci al caso $\alpha > 1$. Calcoliamo le derivate parziali di f nei punti in cui $y \neq 0$:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{|y|^\alpha}{y} \cos\Big(\frac{x}{y}\Big), \\ f_y(x, y) &= \alpha |y|^{\alpha - 2} y \sin\Big(\frac{x}{y}\Big) - \frac{|y|^\alpha x}{y^2} \cos\Big(\frac{x}{y}\Big). \end{aligned}$$

Chiaramente si ha

$$\begin{aligned} &\Big| \frac{|y|^\alpha}{y} \cos\Big(\frac{x}{y}\Big) \Big| \leq |y|^{\alpha - 1}, \\ &\Big| \alpha |y|^{\alpha - 2} y \sin\Big(\frac{x}{y}\Big) \Big| \leq \alpha |y|^{\alpha - 1}, \end{aligned}$$

e le quantità a destra tendono a 0 per $y \to 0$ (indipendentemente da x). Esaminiamo il secondo addendo che appare in $f_y(x, y)$:

$$\Big| \frac{|y|^\alpha x}{y^2} \cos\Big(\frac{x}{y}\Big) \Big| \leq |y|^{\alpha - 2} |x|.$$

Quando $\alpha \geq 2$ (incluso il caso $\alpha = 2$), si ha

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} |y|^{\alpha - 2} |x| = 0.$$

D'altra parte, quando $\alpha < 2$ il seguente limite non esiste:

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{|y|^\alpha x}{y^2} \cos\Big(\frac{x}{y}\Big).$$

Per vedere questo fatto scegliamo $0 < \varepsilon < 2 - \alpha$ e $x = |y|^\varepsilon$. Si ha allora

$$|y|^{\alpha - 2} |x| = |y|^{\alpha - 2 + \varepsilon} \to \infty \quad \text{per} \quad y \to 0,$$

mentre la funzione $\cos(x/y) = \cos(|y|^\varepsilon / y)$ non ha limite per $y \to 0$.

Conclusione: le derivate parziali di f sono continue in 0 se e solo se $\alpha \geq 2$.

iii) Rimane da controllare la continuità delle derivate parziali nei punti $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^2$, con $x_0 \neq 0$. Quando $\alpha > 2$ si ha

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,0)} |y|^{\alpha - 2} |x| = 0.$$

Quando $\alpha = 2$, invece, il seguente limite non esiste:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{|y|^\alpha x}{y^2} \cos\Big(\frac{x}{y}\Big).$$

Conclusione: le derivate parziali di f sono continue su tutto $\mathbb{R}^2$ se e solo se $\alpha > 2$. □

Esercizio 6.7. In dipendenza da $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} (2x^2+y^2)^\alpha \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Studiare la continuità e la differenziabilità di f al variare del parametro α.
2) Esiste α tale che f è differenziabile su $\mathbb{R}^2$ ma non di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$?

Soluzione. 1) Chiaramente si ha $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$. È sufficiente studiare la continuità e la differenziabilità della funzione nell'origine.

Se $\alpha > 0$, dalla disuguaglianza

$$|f(x,y)| \leq 2^\alpha (x^2+y^2)^\alpha$$

segue per confronto la continuità di f in 0. Per $\alpha = 0$, la funzione f si riduce a

$$f(x,y) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

che non ha limite per $\sqrt{x^2+y^2} \to 0$ e quindi f non è continua in 0. In modo analogo si prova che per $\alpha < 0$ la funzione f non è continua in 0.

Studiamo la differenziabilità nel caso $\alpha > 0$. Dalla disuguaglianza

$$\frac{|f(x,y)-f(0,0)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{(2x^2+y^2)^\alpha \left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 2^\alpha (x^2+y^2)^{\alpha-1/2},$$

si deduce che per $\alpha > 1/2$ esistono le derivate parziali di f in $(0,0)$ e valgono:

$$f_x(0,0) = 0 \quad \text{e} \quad f_y(0,0) = 0.$$

Per $\alpha \leq 1/2$ le derivate parziali non esistono e dunque non cè differenziabilità. Usando la medesima disuguaglianza si prova che per $\alpha > 1/2$ si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\langle \nabla f(0,0),(x,y)\rangle}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Dunque. f è differenziabile in 0 se e solo se $\alpha > 1/2$.

2) Le derivate parziali di f in un punto $(x,y) \neq (0,0)$ sono

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 4\alpha(2x^2+y^2)^{\alpha-1} x \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x(2x^2+y^2)^\alpha}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \\ f_y(x,y) &= 2\alpha(2x^2+y^2)^{\alpha-1} y \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{y(2x^2+y^2)^\alpha}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right). \end{aligned}$$

Le derivate parziali sono continue in 0 se e solo se $\alpha > 1$. Dunque, per $1/2 < \alpha \leq 1$ la funzione f è differenziabile ma non di classe C^1.

Ad esempio, si consideri il caso $\alpha = 1$. In questo caso si ha

$$f_x(x, y) \quad = \quad 4x \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - \frac{x(2x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

Il primo addendo tende a 0 se $(x, y) \to (0, 0)$, mentre il secondo non ammette limite. Per vederlo si possono ad esempio usare coordinate polari $x = \varrho \cos \vartheta$, $y = \varrho \sin \vartheta$, con $\varrho \geq 0$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$:

$$f(\varrho \cos \vartheta, \varrho \sin \vartheta) = 4\varrho \cos \vartheta \sin\left(\frac{1}{\varrho}\right) - \cos \vartheta(2 \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) \cos\left(\frac{1}{\varrho}\right).$$

Il secondo addendo non ammette limite in quanto prodotto di una funzione che dipende da ϑ con una funzione di ϱ che non ammette limite per $\varrho \to 0^+$.

□

Esercizio 6.8. Sia $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 2\}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$. Calcolare l'immagine $f(K) \subset \mathbb{R}$.

Soluzione. L'insieme K è chiuso e limitato e quindi è compatto. Si tratta di un'ellisse. La funzione f è continua, essendo un polinomio. Dunque, l'insieme $f(K)$ è un compatto di $\mathbb{R}$ e per il Teorema di Weierstrass esistono $x_0, x_1 \in K$ tali che $m = f(x_0) = \min f(K)$ ed $M = f(x_1) = \max f(K)$. Dunque avremo $K \subset [m, M]$.

Sia $\gamma(t) = tx_1 + (1 - t)x_0$, con $t \in [0, 1]$. Siccome K è convesso, risulta $\gamma(t) \in K$ per ogni $t \in [0, 1]$ ed inoltre la funzione composta $t \mapsto \varphi(t) = f(\gamma(t))$ è continua, essendo composizione di funzioni continue. Per il teorema dei valori intermedi, questa funzione assume tutti i valori compresi fra $m = \varphi(0)$ ed $M = \varphi(1)$. Deduciamo che $f(K) = [m, M]$.

Calcoliamo i valori m ed M. Iniziamo a cercare i punti critici di f interni a K. Il gradiente $\nabla f(x, y) = (2x + y, x + 4y)$ si annulla solo in $(0, 0) \in \mathrm{int}(K)$. Questo è l'unico punto critico. Questo significa che uno dei due punti x_0 oppure x_1 non è interno. Per capire se $(0, 0)$ è un punto di minimo oppure di massimo studiamo la matrice Hessiana, che in un generico punto è

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\det(Hf(0, 0)) = 7 > 0$ e $\mathrm{tr}(Hf(0, 0)) = 6 > 0$, deduciamo che la matrice Hessiana in $(0, 0)$ è definita positiva. Quindi, $(0, 0)$ è un punto di minimo locale stretto. Vedremo in effetti che si tratta di un punto di minimo assoluto.

Ora siamo certi che $x_1 \in \partial K$. La frontiera di K è l'ellisse di equazione $x^2 + 2y^2 = 2$. Restringiamo f su questa ellisse e studiamo i massimi/minimi di f su ∂K. Parametrizziamo l'ellisse in questo modo: $x = \sqrt{2} \cos \vartheta, y = \sin \vartheta$ con $\vartheta \in [0, 2\pi]$. La funzione f sul bordo dell'ellisse è

$$g(\vartheta) = f(\sqrt{2} \cos \vartheta, \sin \vartheta) = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(2\vartheta)$$

che assume il massimo quando $\sin(2\vartheta) = 1$. Dunque, si ha

$$M = \max_K f = \max_{\partial K} f = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Il valore minimo di g è $2 - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$. Questo prova che $m = f(0, 0) = 0$.

In conclusione, l'immagine di K è $f(K) = [0, 2 + \sqrt{2}/2]$.

$\square$

ESERCIZIO 6.9. Sia $p > 0$ un numero reale fissato, sia $K_p \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme

$$K_p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^{2p} + |y|^{2p} \leq 1\},$$

e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y) = x^3 y^3$.

1) Provare che f assume su K_p un valore minimo m_p ed un valore massimo M_p.
2) Calcolare i valori m_p ed M_p.

Soluzione. 1) La funzione f è continua, perchè è un polinomio. L'insieme K_p è limitato, perchè è contenuto nel quadrato $[-1, 1] \times [-1, 1]$, ed inoltre è chiuso perchè la funzione $h(x, y) = |x|^{2p} + |y|^{2p} - 1$ è continua e dunque $K_p = h^{-1}(-\infty, 0])$ è chiuso.

Per il Teorema di Weierstrass, f ammette massimo e minimo su K_p.

2) Il gradiente di f è $\nabla f(x, y) = (3x^2y^3, 3x^3y^2)$ che si annulla se $x = 0$ oppure se $y = 0$, ovvero sui due assi. In questi punti $f = 0$. Siccome f è sia positiva che negativa vicino agli assi, si ha certamente $M_p > 0$ ed $m_p < 0$. I punti critici di f all'interno di K_p non sono punti di estremo locale.

Studiamo la funzione f sulla frontiera $\partial K_p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^{2p} + |y|^{2p} = 1\}$. Siccome K è simmetrico rispetto agli assi ed $f(-x, y) = f(x, -y) = -f(x, y)$, è sufficiente studiare f nel primo quadrante dove $x, y \geq 0$. La parte di frontiera nel primo quadrante è parametrizzata dalla curva

$$\gamma(\vartheta) = \big(\cos(\vartheta)^{1/p}, \sin(\vartheta)^{1/p}\big), \quad \vartheta \in [0, \pi/2].$$

Consideriamo la composizione

$$g(\vartheta) = f(\gamma(\vartheta)) = \cos(\vartheta)^{3/p} \sin(\vartheta)^{3/p} = 2^{-3/p}(\sin(2\vartheta))^{3/p}.$$

La funzione g assume valore massimo quando $\sin(2\vartheta) = 1$, ovvero quando $\vartheta = \pi/4$, cioè quando $x = y$. Deduciamo che

$$M_p = 2^{-3/p} \quad m_p = -2^{-3/p}.$$

I punti di massimo assoluto sono

$$\big(2^{-\frac{1}{2p}}, 2^{-\frac{1}{2p}}\big) \quad \text{e} \quad \big(-2^{-\frac{1}{2p}}, -2^{-\frac{1}{2p}}\big),$$

mentre i punti di minimo assoluto sono

$$\big(-2^{-\frac{1}{2p}}, 2^{-\frac{1}{2p}}\big) \quad \text{e} \quad \big(2^{-\frac{1}{2p}}, -2^{-\frac{1}{2p}}\big).$$

$\square$

ESERCIZIO 6.10. In dipendenza dal parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{x+y} + x^2 + \alpha xy + y^2.$$

i) Determinare tutti i valori di α tali che f sia convessa su tutto $\mathbb{R}^2$.
ii) Per ciascun $\alpha \in [-2, 2]$ discutere esistenza e unicità di punti di minimo di f.

Soluzione. i) Chiaramente, si ha $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Dobbiamo calcolare tutti i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la matrice Hessiana di f sia semidefinita positiva, $Hf \geq 0$ su tutto $\mathbb{R}^2$. Le derivate parziali prime di f sono:

$$\begin{aligned} f_x &= \mathrm{e}^{x+y} + 2x + \alpha y \\ f_y &= \mathrm{e}^{x+y} + \alpha x + 2y. \end{aligned}$$

Le derivate parziali seconde di f sono:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \mathrm{e}^{x+y} + 2 \\ f_{yy} &= \mathrm{e}^{x+y} + 2 \\ f_{xy} &= \mathrm{e}^{x+y} + \alpha. \end{aligned}$$

La matrice Hessiana è semidefinita positiva, $Hf \geq 0$, se e solo se si ha $\mathrm{tr}(Hf) \geq 0$ e $\det(Hf) \geq 0$ su $\mathbb{R}^2$ dove

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(Hf) &= f_{xx} + f_{yy} = 2\mathrm{e}^{x+y} + 4 \\ \det(Hf) &= f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (\mathrm{e}^{x+y} + 2)^2 - (\mathrm{e}^{x+y} + \alpha)^2 \end{aligned}$$

sono la traccia e il determinante della matrice Hessiana. Chiaramente si ha $\mathrm{tr}(Hf) > 4$ su tutto $\mathbb{R}^2$. Studiamo la disequazione $\det(Hf) \geq 0$, ovvero $4\mathrm{e}^{x+y} + 4 - 2\alpha\mathrm{e}^{x+y} - \alpha^2 \geq 0$ che è equivalente a

$$(2-\alpha)(2\mathrm{e}^{x+y} + 2 + \alpha) \geq 0.$$

Nel caso $\alpha > 2$ questa disequazione non è verificata in alcun punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Nel caso $\alpha = 2$ la disuguaglianza è un'uguaglianza. Nel caso $\alpha < 2$ la disuguaglianza è verificata su tutto $\mathbb{R}^2$ se e solo se $2\mathrm{e}^{x+y} + 2 + \alpha \geq 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ovvero se e solo se $2 + \alpha \geq 0$.

In conclusione, f è convessa su tutto $\mathbb{R}^2$ se e solo se $\alpha \in [-2, 2]$.

ii) Per i valori $\alpha \in [-2, 2]$ la funzione f è convessa, e dunque i punti di minimo coincidono con i punti critici. Cerchiamo eventuali punti critici. Le equazioni $f_x = f_y = 0$ danno il sistema

$$\mathrm{e}^{x+y} + 2x + \alpha y = 0, \quad \mathrm{e}^{x+y} + \alpha x + 2y = 0.$$

Sottraendo le due equazioni si ottiene $(2-\alpha)x - (2-\alpha)y = 0$. Quando $\alpha = 2$ questa condizione è vuota: le due equazioni precedenti diventano $\mathrm{e}^{x+y} + 2(x+y) = 0$. L'equazione $\mathrm{e}^t + 2t = 0$ ha una soluzione unica $t^* < 0$ (si vede con il teorema degli zeri). Dunque tutti i punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x + y = t^*$ sono (tutti i) punti critici di f.

Esaminiamo il caso $\alpha \neq 2$. L'equazione $(2-\alpha)x - (2-\alpha)y = 0$ fornisce $x = y$ e quindi si ottiene l'equazione $\mathrm{e}^{2x} + (2+\alpha)x = 0$. Quando $\alpha = -2$, l'equazione non ha soluzione e dunque f non ha punti critici (equiv. punti di minimo). Quando $\alpha \in (-2, 2)$, l'equazione precedente ha una soluzione unica e dunque f ha un unico punto critico (di minimo). □

Esercizio 6.11. Siano $f(x, y) = \sqrt{y - 2x^2}$ e

$$K = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ 2y \leq x^2 + 1,\ y \geq 2x^2\big\}.$$

1) Determinare il dominio di f e disegnare K nel piano.

2) Stabilire se K è aperto/chiuso/compatto/connesso. Calcolare la frontiera ∂K.
3) Calcolare i punti di max e min locale/assoluto di f ristretta a ∂K.
4) Determinare l'immagine $f(K)$.

Soluzione. 1) Dato che l'argomento della radice deve essere non negativo, la funzione data ha come dominio $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 2x^2\}$. Si noti che $f \geq 0$ per ogni $(x,y) \in D_f$ e dunque il minimo assoluto di f è 0.

L'insieme K è il sottoinsieme di D_f delimitato a sinistra dall'asse y, dal basso dalla parabola di equazione $y = 2x^2$, ed infine dall'alto dalla parabola di equazione $y = \frac{x^2+1}{2}$. Queste tre curve sono regolari di classe C^∞ e si intersecano nei punti $(0,0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3}\right)$ e $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Si ha dunque $\partial K = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, dove

i) $\gamma_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]\right\}$,

ii) $\gamma_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[0, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right], y = 2x^2\right\}$,

iii) $\gamma_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[0, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right], y = \dfrac{x^2+1}{2}\right\}$,

2) K è chiuso (ma non aperto), è limitato e quindi anche compatto, ed è connesso in quanto chiaramente connesso per archi.

3) Lo studio di f ristretta alla frontiera ∂K è elementare. Si considera la restrizione di f alle curve γ_1, γ_2 e γ_3:

i) La funzione $f(0,y) = \sqrt{y}$ è monotona crescente nell'intervallo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Pertanto sul segmento γ_1 la funzione f assume valore minimo 0 nel punto $(0,0)$ e valore massimo $\frac{1}{\sqrt{2}}$ per $y = \frac{1}{2}$.

ii) La funzione $x \mapsto f(x, 2x^2)$ è identicamente nulla. Sulla parabola $y = 2x^2$ la funzione f è 0.

iii) La funzione $x \mapsto f\left(x, \frac{x^2+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{1-3x^2}}{\sqrt{2}}$ è monotona decrescente nell'intervallo $\left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$. Pertanto i valori minimo e massimo di f su γ_3 sono $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3}\right) = 0$ e $f(0, \frac{1}{2}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

In conclusione, il massimo assoluto di f su ∂K è $\frac{1}{\sqrt{2}}$ che viene assunto nel punto $(0, \frac{1}{2})$, mentre il minimo assoluto di f su ∂K è 0, ed è assunto sulla parabola γ_2.

4) Infine, poichè nell'interno di K il gradiente di f non si annulla mai:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{-2x}{\sqrt{y-2x^2}}, \frac{1}{2\sqrt{y-2x^2}}\right) \neq (0,0),$$

la funzione f non ha punti di estremo locale nell'interno di K. Essendo K connesso e compatto, dal Teorema di Weierstrass e dal Teorema dei valori intermedi segue che $f(K) = f(\partial K) = \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

□

CAPITOLO 7

1-forme differenziali in $\mathbb{R}^n$

Introduciamo le 1-forme differenziali ("campi vettoriali") e il loro integrale lungo curve. Dopo aver definito forme chiuse, forme esatte ed insiemi contraibili ad un punto, proviamo il Teorema di Poincaré: su aperti contraibili le forme chiuse sono esatte.

1. Forme differenziali chiuse ed esatte. Campi conservativi

Richiami di algebra lineare. $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale (reale) con base canonica $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n$ dove $\mathrm{e}_j = (0, \ldots, 1, \ldots 0)$ con 1 alla posizione j-esima. Lo spazio duale di $\mathbb{R}^n$ è l'insieme di tutte le trasformazioni lineari da $\mathbb{R}^n$ ad $\mathbb{R}$, indichiamolo con $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. Questo insieme è uno spazio vattoriale e la base duale alla base $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n$ si indica con $dx_1, \ldots, dx_n$, dove $dx_i \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ è la trasformazione lineare che agisce nel seguente modo: $dx_i(\mathrm{e}_j) = 1$ se $i = j$ ed è 0 altrimenti. Dunque, ogni trasformazione lineare $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ si scrive nella forma

$$T = a_1 dx_1 + \ldots + a_n dx_n,$$

per costanti reali $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Sul vettore $v = v_1\mathrm{e}_1 + \ldots + v_n\mathrm{e}_n$, la trasformazione T agisce nel seguente modo:

$$T(v) = \Big(\sum_{i=1}^n a_i dx_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^n v_j \mathrm{e}_j\Big) = \sum_{i,j=1}^n a_i v_j dx_i(\mathrm{e}_j) = \sum_{i=1}^n a_i v_i. \tag{7.1}$$

Sia ora $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto.

Definizione 7.1 (1-forma differenziale). Una 1-forma differenziale su A è un'applicazione $\omega : A \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i(x) dx_i, \quad x \in A,$$

per funzioni $\omega_i : A \to \mathbb{R}$. Se $\omega_i \in C(A)$ sono funzioni continue diremo che ω è una 1-forma a coefficienti continui e scriveremo $\omega \in \Omega(A)$. Se $\omega_i \in C^1(A)$ sono funzioni di classe C^1 diremo che ω è una 1-forma di classe C^1 e scriveremo $\omega \in \Omega^1(A)$.

Ora introduciamo le definizioni di forma chiusa e forma esatta. Ricordiamo che il differenziale di una funzione $f \in C^1(A)$ è la 1-forma $df : A \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$

$$df(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i, \quad x \in A.$$

Definizione 7.2 (Forma esatta). Una 1-forma differenziale $\omega \in \Omega(A)$ si dice esatta se esiste una funzione $f \in C^1(A)$ tale che $df = \omega$. La funzione f si dice *potenziale* di f.

In generale, le 1-forme non hanno potenziale. Se lo hanno non è unico.

Definizione 7.3 (Forma chiusa). Una 1-forma differenziale $\omega \in \Omega^1(A)$ si dice chiusa se in ogni punto $x \in A$ si ha

$$\frac{\partial \omega_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j(x)}{\partial x_i}$$

per ogni $i, j = 1, \dots, n$

Tutte le forme esatte sono chiuse, questo deriva dal Teorema di Schwarz. Sia infatti $\omega \in \Omega^1(A)$ una forma esatta. Allora esiste un potenziale $f \in C^2(A)$ tale che $df = \omega$. Ma allora si trova

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}.$$

Vedremo in seguito che le forme chiuse sono esatte, ma solo in insiemi aperti di struttura speciale.

Osservazione 7.4 (Forme e campi vettoriali). Ad una forma ω su A rimane associato un campo vettoriale $F : A \to \mathbb{R}^n$

$$F = (\omega_1, \dots, \omega_n),$$

e viceversa ad un campo vettoriale è associata in modo naturale una forma differenziale.

Un campo vettoriale $F \in C(A; \mathbb{R}^n)$ si dice *conservativo* se possiede un potenziale, cioè se esiste una funzione $f \in C^1(A)$ tale che $F(x) = \nabla f(x)$ per ogni $x \in A$. Dunque un campo vettoriale è conservativo se e solo se la corrispondente forma è esatta.

2. Integrazione di 1-forme

In questa sezione definiamo l'integrale di 1-forme lungo curve. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto.

Definizione 7.5. Si definisce l'integrale di una 1-forma $\omega \in \Omega(A)$ lungo una curva $\gamma \in C^1([0, L]; A)$ come

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega(T) ds,$$

dove T è il campo tangente unitario alla curva.

In questa definizione stiamo supponendo che la curva sia regolare, e che quindi il versore tangente T esista. Con $\omega(T)$ si intende l'azione della forma ω sul vettore T, nel punto $\gamma(t)$ della curva. Esplicitiamo la definizione in termini di integrale di Riemann su intervallo. Per la proprietà di linearità delle forme differenziali e per la formula (7.1) si trova

$$\omega(T) = \omega\Big(\frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|}\Big) = \frac{1}{|\dot\gamma|}\omega(\dot\gamma) \quad \text{e} \quad \omega(\dot\gamma) = \sum_{i=1}^n \omega_i(\gamma)\dot\gamma_i.$$

Dunque, esplicitando la definizione di integrale curvilineo si trova

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega(T) ds = \int_0^L \omega\Big(\frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|}\Big)|\dot\gamma| dt = \int_0^L \omega(\dot\gamma) dt = \sum_{i=1}^n \int_0^L \omega_i(\gamma(t))\dot\gamma_i(t) dt.$$

Possiamo usare l'ultima formula come definizione di integrale di ω lungo γ. Questa formula è ben posta anche per le curve di classe C^1 che non sono regolari.

Spieghiamo alcune proprietà dell'integrale di forme. Osserviamo in primo luogo che l'integrale di una 1-forma lungo una curva dipende dalla orientazione. Se infatti a T sostituiamo $-T$ l'integrale cambia di segno.

DEFINIZIONE 7.6 (Curva inversa). Data una curva $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^n$ definiamo la *curva inversa* $-\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^n$ nel seguente modo $-\gamma(t) = \gamma(L-t)$ per ogni $t \in [0, L]$.

Il sostegno è lo stesso ma lo si percorre in senso contrario.

DEFINIZIONE 7.7 (Concatenazione di curve). Date due curve $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^n$ e $\kappa : [0, M] \to \mathbb{R}^n$ ali che $\gamma(L) = \kappa(0)$ definiamo la loro *concatenazione* $\gamma + \kappa : [0, L + M] \to \mathbb{R}^n$ che vale $\gamma(t)$ per $t \in [0, L]$ e $\kappa(t - L)$ per $t \in [L, L + M]$.

PROPOSIZIONE 7.8. Siano γ e κ due curve (concatenabili) di classe C^1 a valori nell'aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ e sia $\omega \in \Omega(A)$. Allora:

$$\int_{-\gamma} \omega = -\int_{\gamma} \omega,$$

e

$$\int_{\gamma+\kappa} \omega = \int_{\gamma} \omega + \int_{\kappa} \omega.$$

Dim. La dimostrazione è elementare e viene omessa. □

Nel seguente teorema proviamo che l'integrale di forme esatte non dipende dal percorso della curva ma solo dai punti iniziale e finale.

TEOREMA 7.9. Sia $\omega \in \Omega(A)$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

A) La forma differenziale ω è esatta in A.

B) Per ogni curva $\gamma \in C^1([0, L]; A)$ l'integrale

$$\int_{\gamma} \omega$$

dipende solo da $\gamma(0)$ e $\gamma(1)$, ed in effetti è uguale a $f(\gamma(L)) - f(\gamma(0))$ dove f è un potenziale di γ.

C) Per ogni curva $\gamma \in C^1([0, L]; A)$ chiusa si ha

$$\int_{\gamma} \omega = 0.$$

Dim. A)⇒B) Sia $f \in C^1(A)$ un potenziale di f, $df = \omega$. Allora si ha

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \omega &= \sum_{i=1}^{n} \int_0^L \frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial x_i} \dot{\gamma}_i(t) dt = \int_0^L \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt \\ &= \int_0^L \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt = f(\gamma(L)) - f(\gamma(0)).\end{aligned}$$

B)⇒C) Immediato.

C)⇒B) Supponiamo che le curve γ e κ abbiano gli stessi punti iniziale e finale. Allora la concatenazione $\gamma - \kappa = \gamma + (-\kappa)$ è una curva chiusa e dunque

$$0 = \int_{\gamma-\kappa} \omega = \int_{\gamma} \omega - \int_{\kappa} \omega.$$

B)⇒A) Vogliamo costruire un potenziale di f su A. Senza perdere di generalità possiamo supporre che A sia connesso e dunque connesso per archi. Fissiamo a nostro piacere un punto $x_0 \in A$ e prendiamo un punto $x \in A$. Esiste una curva C^1 a tratti che parte da x_0 ed arriva in x, chiamiamola γ_x. Definiamo la funzione $f : A \to \mathbb{R}$ ponendo

$$f(x) = \int_{\gamma_x} \omega.$$

Per l'ipotesi B), la definizione non dipende dalla particolare curva γ_x scelta, ma solo dal punto x.

Vogliamo provare che per ogni $x \in A$ e per ogni $i = 1, \dots, n$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \omega_i(x).$$

Siccome ω ha coefficienti continui seguirà che $f \in C^1(A)$. Indichiamo con $[x, x + t\mathrm{e}_i]$ la curva segmento che congiunge i due estremi, dove $t \in \mathbb{R}$ è abbastanza piccolo. La concatenazione $\gamma_x + [x, x + t\mathrm{e}_i]$ può essere usata per definire $f(x + t\mathrm{e}_i)$. Quindi si ha

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f(x + t\mathrm{e}_i) - f(x)\big) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\int_{\gamma_x + [x, x+t\mathrm{e}_i]} \omega - \int_{\gamma_x} \omega\Big) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_{[x, x+t\mathrm{e}_i]} \omega \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^t \omega_i(x + s\mathrm{e}_i) ds = \omega_i(x),
\end{aligned}$$

per il Teorema fondamentale del calcolo integrale.

□

3. Teorema di Poincaré

In questa sezione proviamo che le forme chiuse su insiemi aperti contraibili sono esatte.

Definizione 7.10 (Insieme contraibile). Un insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice *contraibile* se esistono un punto $x_0 \in A$ ed una funzione $H \in C^\infty(A \times [0, 1]; A)$ tali che $H(x, 1) = x$ e $H(x, 0) = x_0$ per ogni $x \in A$.

La funzione H si chiama *omotopia di A ad un punto.*

Definizione 7.11 (Insieme stellato). Un insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice stellato rispetto ad un punto $x_0 \in A$ se per ogni $x \in A$ il segmento $[x_0, x]$ è interamente contenuto in A.

Se ad esempio A è stellato rispetto al punto $0 \in A$, allora la funzione $H(x, t) = tx$ contrae A al punto 0. Quindi gli insiemi stellati sono contraibili.

Definizione 7.12 (Insieme convesso). Un insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice convesso se per ogni coppia di punti $x, x_0 \in A$ il segmento $[x_0, x]$ è interamente contenuto in A.

Gli insiemi convessi sono evidentemente stellati rispetto ad ogni loro punto e dunque sono contraibili.

Teorema 7.13. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto contraibile e sia $\omega \in C^1(A)$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

A) ω è chiusa.
B) ω è esatta.

Dim. Sia $H \in C^\infty(A \times [0,1]; A)$ una contrazione di A al punto $x_0 \in A$. Per ogni $x \in A$ consideriamo la curva $\gamma_x(t) = H(x,t)$ con $t \in [0,1]$. Osserviamo che

$$\dot\gamma_x(t) = \frac{\partial H(x,t)}{\partial t}.$$

Definiamo la funzione $f : A \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_{\gamma_x} \omega = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \omega_i(H(x,t)) \frac{\partial H_i(x,t)}{\partial t} dt.$$

Vogliamo provare che per ogni $j = 1, \ldots, n$ si ha

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = \omega_j(x), \quad x \in A.$$

È lecito derivare dentro il segno di integrale (non proviamo questa affermazione):

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \Big\{ \omega_i(H) \frac{\partial^2 H_i}{\partial x_j \partial t} + \frac{\partial H_i}{\partial t} \sum_{k=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} \frac{\partial H_k}{\partial x_j} \Big\} dt.$$

Usando il fatto che la forma ω è chiusa si trova

$$\sum_{i,k=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} \frac{\partial H_i}{\partial t} \frac{\partial H_k}{\partial x_j} = \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} \frac{\partial H_i}{\partial t} \frac{\partial H_k}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial H_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial t} \omega_k(H),$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} &= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \Big(\omega_i(H) \frac{\partial H_i}{\partial x_j} \Big) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \omega_i(H(x,1)) \frac{\partial H_i}{\partial x_j}(x,1) - \omega_i(H(x,0)) \frac{\partial H_i}{\partial x_j}(x,0) \\ &= \omega_j(x). \end{aligned}$$

Nell'ultima riga si usa il fatto che $H(x,1) = x$ e $H(x,0) = x_0$.

$\square$

CAPITOLO 8

Teoremi di invertibilità locale e della funzione implicita

1. Teorema di invertibilità locale

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice reale $n \times n$ e consideriamo la funzione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax$ con $x \in \mathbb{R}^n$. Il sistema di equazioni lineari

$$f(x) = b \tag{8.1}$$

ha soluzione unica per ogni $b \in \mathbb{R}^n$ se e solo se $\det(A) \neq 0$. In altri termini, f è iniettiva e suriettiva se e solo se $\det(A) \neq 0$. Vogliamo generalizzare questi risultati di risolubilità a sistemi di equazioni (8.1) dove $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una funzione *non lineare*.

Dobbiamo preliminarmente introdurre i concetti di *diffeomorfismo* e di *diffeomorfismo locale*.

DEFINIZIONE 8.1 (Diffeomorfismo). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Una funzione $f \in C^k(A; \mathbb{R}^n)$, $1 \leq k \leq \infty$, si dice *diffeomorfismo di classe* C^k se:

i) $f : A \to f(A) \subset \mathbb{R}^n$ è iniettiva (e suriettiva);
ii) $f(A) \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme aperto;
iii) La funzione inversa verifica $f^{-1} \in C^k(f(A); A)$.

Quando $k = 0$ la definizione di diffeomorfismo si riduce a quella di omeomorfismo. Siano A e B due spazi topologici. Una funzione $f : A \to B$ si dice *omeomorfismo* se f è iniettiva e suriettiva, ed inoltre sia f che f^{-1} sono continue. In questo caso (ovvero se f è 1-1 e su), dire che f^{-1} sia continua equivale a dire che f trasforma aperti in aperti.

DEFINIZIONE 8.2 (Diffeomorfismo locale). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Una funzione $f \in C^k(A; \mathbb{R}^n)$, $1 \leq k \leq \infty$, si dice un *diffeomorfismo locale di classe* C^k se:

i) f è aperta, e cioè trasforma insiemi aperti in aperti.
ii) Per ogni punto $x \in A$ esiste un $\delta > 0$ tale che $f : B_\delta(x) \to \mathbb{R}^n$ è iniettiva e la funzione inversa verifica $f^{-1} \in C^k(f(B_\delta(x)); \mathbb{R}^n)$.

In particolare, se f è un diffeomorfismo locale allora $f(A) \subset \mathbb{R}^n$ è aperto.

TEOREMA 8.3 (Invertibilità locale). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $f \in C^k(A; \mathbb{R}^n)$, $1 \leq k \leq \infty$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

A) f è un diffeomorfismo locale di classe C^k;
B) $\det(J_f(x_0)) \neq 0$ in ogni punto $x_0 \in A$, dove J_f è la matrice Jacobiana di f.

ESEMPIO 8.4. Si consideri il seguente sistema di due equazioni nelle incognite $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y \sin x = b_1 \\ x^2 y + \sin y = b_2, \end{cases} \tag{8.2}$$

dove $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ è un dato assegnato.

Certamente, quando $b = 0$ il sistema ha almeno la soluzione nulla $x = y = 0$. Proviamo il seguente fatto: esistono due numeri $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ tali che per ogni $b \in B_\varepsilon(0)$ esiste un'unica soluzione $(x, y) \in B_\delta(0)$ del sistema.

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione $f(x, y) = (x + y \sin x, x^2 y + \sin y)$. Risulta $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$. La matrice Jacobiana di f è

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + y \cos x & \sin x \\ 2xy & x^2 + \cos y \end{pmatrix}.$$

Nel punto $(x, y) = (0, 0) = 0$ si ha $\det J_f(0) = 1$ e per continuità si deduce l'esistenza di un $\delta > 0$ tale che $\det J_f(x, y) > 0$ per ogni $(x, y) \in B_\delta(0)$. Dunque, f è un diffeomorfismo locale di classe C^∞ su $B_\delta(0)$. Per il Teorema di invertibilità locale, pur di prendere $\delta > 0$ ancora più piccolo, f è anche aperta ed iniettiva su $B_\delta(0)$. Dunque l'insieme $f(B_\delta(0)) \subset \mathbb{R}^2$ è aperto e siccome $0 = f(0) \in f(B_\delta(0))$ allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(0) \subset f(B_\delta(0))$.

Se $b \in B_\varepsilon(0)$ allora esiste $(x, y) \in B_\delta(0)$ tale che $f(x, y) = b$ e per l'iniettività di f il punto (x, y) è unico in $B_\delta(0)$. □

Esempio 8.5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\big(1/x\big), & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Affermiamo che:

i) f è derivabile in tutti i punti ed in particolare $f'(0) = 1$;
ii) f non è iniettiva in alcun intorno di $x = 0$.

In effetti, f non è di classe $C^1(\mathbb{R})$ perchè f' non è continua. Le ipotesi del Teorema di invertibilità locale non sono verificate.

Dalla definizione si calcola immediatamente $f'(0) = 1$ e inoltre per $x \neq 0$

$$f'(x) = 1 + 2x \sin(1/x) - \cos(1/x).$$

Il limite di $f'(x)$ per $x \to 0$ non esiste. Nei punti

$$x_k = \frac{1}{2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0,$$

si ha $f'(x_k) = 0$ ed $f(x_k) = x_k$. Per $x \neq 0$ la derivata seconda di f è

$$f''(x) = 2 \sin(1/x) - \frac{2}{x} \cos(1/x) - \frac{1}{x^2} \sin(1/x),$$

e quindi per $k > 0$ si ha

$$f''(x_k) = -\frac{2}{x_k} < 0.$$

I punti x_k sono punti di massimo locale stretto e $x_k \to 0$ per $k \to \infty$. Quindi f non è iniettiva in alcun intorno di $x = 0$.

Dim. (Prova del Teorema 8.3) A)$\Rightarrow$B). Fissiamo $x_0 \in A$ e sia $\delta > 0$ tale che $f \in C^k(B_\delta(x_0); \mathbb{R}^n)$ sia un diffeomorfismo di classe C^k. Indichiamo con $f^{-1} : f(B_\delta(x_0)) \to B_\delta(x_0)$ la funzione inversa. Allora per ogni $x \in B_\delta(x_0)$ si ha $f^{-1}(f(x)) = x = I_n(x)$, dove I_n è la matrice identità $n \times n$. Dal teorema sul differenziale della funzione composta si ha

$$J_{f^{-1}}(f(x))J_f(x) = I_n, \quad x \in B_\delta(x_0).$$

Dal teorema sui determinanti si ottiene allora

$$1 = \det(I_n) = \det\big(J_{f^{-1}}(f(x))J_f(x)\big) = \det\big(J_{f^{-1}}(f(x))\big)\det(J_f(x)\big).$$

Questo implica che $\det(J_f(x)) \neq 0$ per ogni $x \in B_\delta(x_0)$ e in particolare per $x = x_0$.

B)$\Rightarrow$A). Supponiamo che sia $\det(J_f(x)) \neq 0$ in ogni punto $x \in A$. Siano $x_0 \in A$ ed $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere tale che $B_\varepsilon(x_0) \subset A$. Proveremo che

(8.3) esiste $\delta > 0$ tale che $B_\delta(f(x_0)) \subset f(B_\varepsilon(x_0))$.

Da questo segue che f trasforma punti interni in punti interni e quindi aperti in aperti. L'affermazione (8.3) può essere riscritta nel seguente modo:

(8.4) esiste $\delta > 0$ t.c. per ogni $y \in B_\delta(f(x_0))$ esiste $x \in B_\varepsilon(x_0)$ tale che $f(x) = y$.

Fissiamo dunque $y \in B_\delta(f(x_0))$ con $\delta > 0$ da determinare e cerchiamo un punto $x \in B_\varepsilon(x_0)$ tale che $f(x) = y$. Sia $T = df(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ il differenziale di f in x_0 e osserviamo che $\det(T) = \det(J_f(x_0)) \neq 0$. Dunque esiste l'operatore lineare inverso $T^{-1} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Definiamo la funzione K della variabile x

$$K(x) = x - T^{-1}(f(x) - y). \tag{8.5}$$

Vogliamo provare che $K : \bar{B}_\varepsilon(x_0) \to \bar{B}_\varepsilon(x_0)$ è una contrazione rispetto alla distanza standard.

Siccome $\bar{B}_\varepsilon(x_0)$ è completo con la distanza ereditata da $\mathbb{R}^n$, dal Teorema di punto fisso di Banach segue che esiste un (unico) punto $x \in \bar{B}_\varepsilon(x_0)$ tale che $x = K(x)$. Ma allora

$$x = K(x) = x - T^{-1}(f(x) - y) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = T^{-1}(f(x) - y) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - y = 0,$$

e quindi $f(x) = y$. Questo prova l'affermazione (8.4).

Dobbiamo mostrare che:
i) K è ben definita, e cioè trasforma $\bar{B}_\varepsilon(x_0)$ in se stesso;
ii) K è una contrazione.

Per provare che K è ben definita conviene introdurre la funzione ausiliaria $g(x) = x - T^{-1}(f(x))$. Osserviamo che $dg(x_0) = I_n - T^{-1}df(x_0) = 0$, ovvero, per l'identificazione di differenziale e matrice Jacobiana,

$$\frac{\partial g_i(x_0)}{\partial x_j} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n. \tag{8.6}$$

Siccome g è di classe C^1 (in quanto lo è f), pur di prendere un $\varepsilon > 0$ più piccolo, si può per continuità supporre che

$$\|dg(x)\| \leq \frac{1}{2} \quad \text{per ogni } x \in B_\varepsilon(x_0). \tag{8.7}$$

Questa affermazione può essere provata partendo dalla disuguaglianza (Teorema sulle norme equivalenti)

$$\|dg(x)\| \leq C\Big(\sum_{i,j=1}^{n} \Big(\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j}\Big)^2\Big)^{1/2},$$

con $C > 0$ costante assoluta. Dalla (8.6) e dalla continuità delle derivata parziali di g segue la (8.7). È in questo punto che si usa la regolarità almeno C^1 di f.

Sia ora $x \in \bar{B}_\varepsilon(x_0)$. Allora abbiamo

$$\begin{aligned}|K(x) - x_0| &= |x - T^{-1}(f(x) - y) - x_0| = |x - T^{-1}(f(x)) + T^{-1}(y) - x_0| \\ &= |g(x) - g(x_0) + T^{-1}(y - f(x_0))| \leq |g(x) - g(x_0)| + |T^{-1}(f(x_0) - y)|.\end{aligned}$$

Per il Corollario del Teorema del valor medio esiste $z \in [x_0, x]$ tale che

$$|g(x) - g(x_0)| \leq \|dg(z)\||x - x_o|,$$

e quindi

$$|K(x) - x_0| \leq \|dg(z)\||x - x_0| + \|T^{-1}\||f(x_0) - y| \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \delta\|T^{-1}\|.$$

In definitiva, affinchè K sia ben definita è sufficiente scegliere $\delta < \frac{\varepsilon}{2\|T^{-1}\|}$.

Proviamo ora che K è una contrazione. Per ogni $x, \bar{x} \in \bar{B}_\varepsilon(x_0)$ si ha come sopra

$$\begin{aligned}|K(x) - K(\bar{x})| &= |x - T^{-1}(f(x) - y) - (\bar{x} - T^{-1}(f(\bar{x}) - y))| \\ &= |x - T^{-1}(f(x)) - (\bar{x} - T^{-1}(f(\bar{x}))| = |g(x) - g(\bar{x})| \leq \frac{1}{2}|x - \bar{x}|.\end{aligned}$$

Dunque K è una contrazione con fattore contrattivo 1/2.

Prossimo obiettivo è di provare che esiste una costante $M > 0$ tale che per ogni $x, \bar{x} \in B_\varepsilon(x_0)$ si ha

$$|f(x) - f(\bar{x})| \geq M|x - \bar{x}|. \tag{8.8}$$

Tale maggiorazione implica in particolare che f è iniettiva e che f^{-1} è continua. Precisamente f^{-1} verifica

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(\bar{y})| \leq \frac{1}{M}|y - \bar{y}|. \tag{8.9}$$

La verifica di (8.8) si riconduce nuovamente alle proprietà di g:

$$\begin{aligned}|x - \bar{x}| &= |g(x) - T^{-1}(f(x)) - (g(\bar{x}) - T^{-1}(f(\bar{x})))| \\ &\leq |g(x) - g(\bar{x})| + \|T^{-1}\||f(x) - f(\bar{x})| \\ &\leq \frac{1}{2}|x - \bar{x}| + \|T^{-1}\||f(x) - f(\bar{x})|,\end{aligned}$$

e quindi $|f(x) - f(\bar{x})| \geq M|x - \bar{x}|$ con $M = \frac{1}{2\|T^{-1}\|}$.

Rimane da provare che la funzione inversa $f^{-1} : f_\varepsilon(B(x_0)) \to B_\varepsilon(x_0)$ è di classe C^k. Proviamo che f^{-1} è differenziabile con derivate parziali continue. Per ipotesi si ha

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + E_{x_0}(x),$$

dove

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E_{x_0}(x)}{|x - x_0|} = 0.$$

Invertendo l'identità precedente con $y = f(x)$ ed $y_0 = f(x_0)$ si ottiene

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) &= df(x_0)^{-1}(y - y_0 - E_{x_0}(x)) \\ &= df(x_0)^{-1}(y - y_0) - df(x_0)^{-1}(E_{f^{-1}(y_0)}(f^{-1}(y))). \end{aligned}$$

Dalla stima (8.8) si deduce che

$$\lim_{y \to y_0} \frac{E_{f^{-1}(y_0)}(f^{-1}(y))}{|y - y_0|} = \lim_{x \to x_0} \frac{E_{x_0}(x)}{|f(x) - f(x_0)|} = \lim_{x \to x_0} \frac{|x - x_0|}{|f(x) - f(x_0)|} \frac{E_{x_0}(x)}{|x - x_0|} = 0.$$

Questo prova che f^{-1} è differenziabile nel punto y_0 con differenziale

$$df^{-1}(y_0) = df(x_0)^{-1}.$$

Poichè il differenziale può essere rappresentato come la matrice Jacobiana delle derivate parziali, l'ultima identità può essere riformulata dicendo che $Jf^{-1}(y_0) = Jf(x_0)^{-1}$. Dal Teorema sulla matrice inversa deduciamo che le entrate di $Jf^{-1}(y_0)$ sono funzioni che dipendono in modo continuo da y_0. Lo stesso argomento prova che f^{-1} è di classe C^k. □

Il teorema di invertibilità locale ha una naturale riformulazione nell'ambito degli spazi di Banach.

Teorema 8.6. Siano X ed Y due spazi di Banach, sia $A \subset X$ un insieme aperto e sia $f : X \to Y$ una funzione di classe $C^1(A)$ (ovvero f è differenziabile in tutti i punti di A e la funzione $A \ni x \mapsto df(x) \in \mathscr{L}(X, Y)$ è continua). Allora per ogni $x_0 \in A$ esiste $\delta > 0$ tale che $f(B_\delta(x_0)) \subset Y$ è un aperto, f è invertibile su $B_\delta(x_0)$ ed $f^{-1} \in C^1(f(B_\delta(x_0)); B_\delta(x_0))$.

La dimostrazione del teorema è identica a quella in $\mathbb{R}^n$.

Osservazione 8.7 (Invertibilità globale). Supponiamo che $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sia un diffeomorfismo locale (ad esempio di classe C^1). In particolare, f è localmente invertibile. Ci si può domandare sotto quali ipotesi ulteriori su f, la funzione f è globalmente invertibile. Teoremi di questo tipo si dicono teoremi di inversione globale. Si veda sul tema il Capitolo 3 di Ambrosetti-Prodi, *A Primer of Nonlinear Analysis*, Cambridge.

2. Teorema sulla funzione implicita

2.1. Premessa. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione e consideriamo l'equazione $f(x, y) = 0$ nelle variabili $x, y \in \mathbb{R}$. Ci domandiamo quando tale equazione definisca implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ oppure una funzione $x = \psi(y)$, anche solo *localmente*.

Consideriamo l'esempio $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ ed analizziamo l'insieme (la circonferenza)

$$M = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\big\}.$$

Le derivate parziali di f sono $f_x = 2x$ ed $f_y = 2y$. Dunque, su M si ha $|\nabla f(x, y)| = 2 \neq 0$. In particolare, nel "polo nord" $N = (0, 1)$ si ha $f_x = 0$ ed $f_y = 2 \neq 0$, mentre nel "polo est" $E = (1, 0)$ si ha $f_x = 2 \neq 0$ ed $f_y = 0$.

La semicirconferenza centrata nel polo nord N è l'y-grafico della funzione $\varphi \in C^\infty(-1,1)$, $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$,

$$M \cap \{y > 0\} = \big\{(x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in (-1,1)\big\}.$$

La variabile y si esplicita in funzione della variabile x.

Viceversa, la semicirconferenza centrata nel polo est E è l'x-grafico della funzione $\psi \in C^\infty(-1,1)$, $\psi(y) = \sqrt{1-y^2}$,

$$M \cap \{x > 0\} = \big\{(\psi(y), y) \in \mathbb{R}^2 : y \in (-1,1)\big\}.$$

La variabile x si esplicita come funzione della variabile y.

2.2. Argomento euristico. Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ una funzione tale che $f(0,0) = 0$ ed $f_y(0,0) > 0$. Allora:

– Per continuità delle derivate prime, esistono $\delta > 0$ ed $\eta > 0$ tali che $f_y(x,y) > 0$ per $(x,y) \in [-\delta,\delta] \times [-\eta \times \eta]$.
– Siccome $y \mapsto f(0,y)$ è strettamente crescente ed $f(0,0) = 0$, avremo $f(0,-\eta) < 0$ ed $f(0,\eta) > 0$.
– Per continuità di f, a meno di scegliere $\delta > 0$ ancora più piccolo, avremo $f(x,-\eta) < 0$ ed $f(x,\eta) > 0$ per ogni $x \in [-\delta,\delta]$.
– Per il Teorema degli zeri, per ogni $x \in [-\delta,\delta]$ esiste un punto $y = \varphi(x) \in [-\eta,\eta]$ tale che $f(x,\varphi(x)) = 0$. Per la stretta monotonia, questo punto è unico. Dunque, il grafico della funzione $x \mapsto \varphi(x)$ descrive l'insieme degli zeri di f.

2.3. Teorema di Dini. Siano $p, q \in \mathbb{N}$ numeri interi tali che $p, q \geq 1$. Scomponiamo $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, con $n = p + q$. Indichiamo con $x \in \mathbb{R}^p$ la variabile di $\mathbb{R}^p$ e con $y \in \mathbb{R}^q$ la variabile di $\mathbb{R}^q$. Data una funzione derivabile $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$, $f = (f_1, \dots, f_q)$, definiamo le *matrici Jacobiane parziali*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_q}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_q}{\partial x_p} \end{pmatrix}, \quad \text{matrice } q \times p,$$

e analogamente

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_q}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_q}{\partial y_q} \end{pmatrix}, \quad \text{matrice } q \times q.$$

TEOREMA 8.8 (del Dini). Siano $A \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ un insieme aperto, $(x_0, y_0) \in A$ e sia $f \in C^k(A; \mathbb{R}^q)$, $k \geq 1$, una funzione che verifica

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \det\Big(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Big) \neq 0.$$

Allora esistono due numeri $\eta, \delta > 0$ ed esiste una funzione $\varphi \in C^k(B_\delta(x_0); B_\eta(y_0))$ tali che:

i) $B_\delta(x_0) \times B_\eta(y_0) \subset A$;
ii) $\big\{(x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}^n : x \in B_\delta(x_0)\big\} = \big\{(x, y) \in B_\delta(x_0) \times B_\eta(y_0) : f(x, y) = 0\big\}$;
iii) La funzione φ verifica

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = -\Big(\frac{\partial f(x, \varphi(x))}{\partial y}\Big)^{-1} \frac{\partial f(x, \varphi(x))}{\partial x}, \quad x \in B_\delta(x_0),$$

dove $\partial \varphi / \partial x$ indica la matrice Jacobiana di φ e a destra si intende un prodotto di matrici.

Dim. Definiamo la funzione $F : A \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$

$$F(x, y) = (x, f(x, y)), \quad (x, y) \in A.$$

Siccome $f \in C^k(A; \mathbb{R}^q)$, risulta $F \in C^k(A; \mathbb{R}^n)$. Inoltre si ha $F(x_0, y_0) = (x_0, 0)$. La matrice Jacobiana di F è

$$J_F(x, y) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad \text{matrice } n \times n.$$

e dunque nel punto $(x_0, y_0) \in A$ si ha

$$\det(J_F(x_0, y_0)) = \det\Big(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Big) \neq 0.$$

Per il teorema di invertibilità locale esiste $\eta > 0$ tale che la funzione $F \in C^k(B_\eta(x_0) \times B_\eta(y_0); \mathbb{R}^n)$ è un diffeomorfismo di classe C^k sull'immagine. In particolare, l'insieme $B = F(B_\eta(x_0) \times B_\eta(y_0))$ è aperto e $(x_0, 0) = F(x_0, y_0) \in B$. Dunque esiste $\delta > 0$ tale che $B_\delta(x_0) \times B_\delta(0) \subset B$. Indichiamo con $G : B \to A$ la funzione inversa di F, $G = F^{-1} \in C^1(B; A)$, e indichiamo con $G_1 : D \to \mathbb{R}^p$ e $G_2 : B \to \mathbb{R}^q$ le componenti di G in $\mathbb{R}^p$ ed $\mathbb{R}^q$.

Essendo $F \circ G$ l'identità, risulta $G_1(x, y) = x$ e $y = f(x, G_2(x, y))$. Infatti si ha

$$(x, y) = F(G(x, y)) = F(G_1(x, y), G_2(x, y)) = (G_1(x, y), f(G_1(x, y), G_2(x, y)).$$

Nelle coordinate (x, y), il luogo di zeri di f è dato dall'equazione $y = 0$. Questo suggerisce la definizione

$$\varphi(x) = G_2(x, 0), \quad x \in B_\delta(x_0).$$

Risulta $\varphi \in C^k(B_\delta(x_0); B_\eta(y_0))$. Proviamo l'uguaglianza insiemistica ii).

Per ogni $x \in B_\delta(x_0)$ si ha

$$f(x, \varphi(x)) = f(x, G_2(x, 0)) = 0,$$

e quindi $(x, \varphi(x)) \in \big\{(x, y) \in B_\delta(x_0) \times B_\eta(y_0) : f(x, y) = 0\big\}$. Questo prova l'inclusione "$\subset$".

Proviamo l'inclusione opposta. Siano $x \in B_\delta(x_0)$ e $y \in B_\eta(y_0)$ tali che $f(x, y) = 0$. Allora, essendo $G \circ F$ l'identità, si ha

$$(x, y) = G(F(x, y)) = G(x, f(x, y)) = G(x, 0) = (x, G_2(x, 0)) = (x, \varphi(x)),$$

da cui si deduce che $y = \varphi(x)$, e quindi $(x, y) \in \mathrm{gr}(\varphi)$.

Per provare l'affermazione iii), si deriva rispetto ad x l'identità $f(x,\varphi(x)) = 0$, $x \in B_\delta(x_0)$, per ottenere

$$\frac{\partial f(x,\varphi(x))}{\partial x} + \frac{\partial f(x,\varphi(x))}{\partial y}\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = 0. \tag{8.10}$$

Riordinando e invertendo si ottiene la tesi. □

OSSERVAZIONE 8.9. Se f è almeno di classe C^2, l'identità (8.10) può essere ulteriormente derivata, ottenendo formule per le derivate seconde di φ.

ESEMPIO 8.10. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

i) La funzione f è continua ed ha derivate parziali in tutti i punti. In particolare si ha
$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} \neq 0.$$
Inoltre, $f(0,0) = 0$.

ii) L'insieme $\big\{(x,y) \in (-\delta,\delta) \times (-\eta,\eta) : f(x,y) = 0\big\}$ non è un grafico di funzione per alcun $\delta, \eta > 0$.

iii) Tutte le ipotesi del Teorema di Dini sono verificate tranne una. La funzione f non è di classe C^1.

3. Massimi e minimi vincolati. Moltiplicatori di Lagrange

Nel seguito sarà sempre $n \geq 2$.

DEFINIZIONE 8.11. Siano $M \subset \mathbb{R}^n$ un insieme, $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto ed $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione.

i) Diciamo che un punto $x_0 \in M \cap A$ è un punto di minimo locale di f ristretta (o vincolata) su M se esiste $\delta > 0$ tale che $B_\delta(x_0) \subset A$ e
$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{per ogni } x \in M \cap B_\delta(x_0).$$

ii) Diciamo che un punto $x_0 \in M \cap A$ è un punto di massimo locale di f ristretta (o vincolata) su M se esiste $\delta > 0$ tale che $B_\delta(x_0) \subset A$ e
$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{per ogni } x \in M \cap B_\delta(x_0).$$

Nei casi i) e ii) diremo che x_0 è un punto di *estremo locale di f su M*.

L'insieme M è talvolta chiamato *vincolo*.

TEOREMA 8.12 (Moltiplicatori di Lagrange). Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, $f \in C^1(A)$, ed $M = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}$, dove $h \in C^1(\mathbb{R}^n)$ è una funzione che verifica $\nabla h(x) \neq 0$ per ogni $x \in M$. Se $\bar{x} \in A \cap M$ è un punto di estremo locale di f su M, allora esiste un numero $\lambda \in \mathbb{R}$, detto *moltiplicatore di Lagrange*, tale che $\nabla f(\bar{x}) = \lambda \nabla h(\bar{x})$.

Dim. Siccome $\nabla h(\bar{x}) \neq 0$ possiamo supporre senza perdere di generalità che

$$\frac{\partial h(\bar{x})}{\partial x_n} \neq 0.$$

Usiano la notazione $x = (x', x_n)$ con $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $x_n \in \mathbb{R}$. Per il Teorema della funzione implicita esistono $\delta, \eta > 0$ ed esiste una funzione $\varphi \in C^1(B_\delta(\bar{x}'); B_\eta(\bar{x}_n))$ tale che

$$\begin{aligned}\big\{(x', \varphi(x')) \in \mathbb{R}^n : x \in B_\delta(\bar{x}')\big\} &= \big\{x \in B_\delta(\bar{x}') \times B_\eta(\bar{x}_n) : h(x) = 0\big\} \\ &= M \cap B_\delta(\bar{x}') \times B_\eta(\bar{x}_n).\end{aligned}$$

La funzione $g \in C^1(B_\delta(\bar{x}'))$, $g(x') = f(x', \varphi(x'))$, ha in $\bar{x}'$ un punto di estremo locale. Dunque, si ha $\nabla g(\bar{x}') = 0$ e precisamente:

$$\frac{\partial g(\bar{x}')}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} + \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n}\frac{\partial \varphi(\bar{x}')}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, ..., n-1.$$

D'altra parte, dal Teorema della funzione implicita sappiamo che

$$\frac{\partial \varphi(\bar{x}')}{\partial x_i}\frac{\partial h(\bar{x})}{\partial x_n} + \frac{\partial h(\bar{x})}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, ..., n-1.$$

Scegliendo il numero

$$\lambda = \frac{\dfrac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n}}{\dfrac{\partial h(\bar{x})}{\partial x_n}} \in \mathbb{R},$$

dalle equazioni precedenti si ottiene $\nabla f(\bar{x}) = \lambda \nabla h(\bar{x})$. □

Esempio 8.13. Sia $A = (a_{ij})_{i,j=1,...,n}$ una matrice $n \times n$ simmetrica, $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni $i, j = 1, ..., n$, e indichiamo con $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ i suoi n autovalori. Proveremo che

$$\min_{|x|=1} \langle Ax, x\rangle = \lambda_1 \quad \text{e} \quad \max_{|x|=1} \langle Ax, x\rangle = \lambda_n.$$

Siano $h(x) = |x|^2 - 1$ la funzione di vincolo ed $f(x) = \langle Ax, x\rangle$. La superficie sferica $M = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}$ è compatta e dunque f assume massimo e minimo su M.

Sia $x \in M$ un punto in cui è assunto il minimo. Per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(x) = \lambda \nabla h(x)$. Calcoliamo le derivate parziali di f. Per $k = 1, ..., n$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i,j=1}^m a_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(\delta_{ik} x_j + x_i \delta_{jk}) = \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j + \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i = 2 \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j.$$

Abbiamo usato il fatto che la matrice A è simmetrica e il simbolo di Kronecker $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} =$ se $i \neq j$. Dunque si ha il sistema di equazioni

$$\begin{cases} Ax = \lambda x \\ |x| = 1. \end{cases}$$

Questo prova che λ è un autovalore di A e che x è un corrispondente autovettore. Proviamo che $\lambda = \lambda_1$. Sia x_i un autovettore relativo all'autovalore λ_i, con $i = 1, \ldots, n$ e $|x_i| = 1$. Allora si ha per ogni i

$$\lambda = \langle Ax, x\rangle = f(x) \leq f(x_i) = \langle Ax_i, x_i\rangle = \lambda_i,$$

e quindi λ è il minimo degli autovalori.

In modo analogo si prova l'affermazione sul massimo degli autovalori.

4. Esercizi con soluzione

ESERCIZIO 8.1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

i) Determinare il più grande aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ tale che f sia un diffeomorfismo locale di classe C^∞ su A.
ii) Stabilire se f è un diffeomorfismo su A;
iii) Dare esempi di insiemi aperti $B \subset A$ massimali su cui f è un diffeomorfismo.

Soluzione. i) La matrice Jacobiana di f è

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix},$$

e dunque $\det J_f(x, y) = 4(x^2 + y^2)$. Sull'insieme $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ il determinante Jacobiano non si annulla e dunque per il Teorema di invertibilità locale f è un diffeomorfismo locale (di classe C^∞) su A.

ii) f non è iniettiva su A in quanto $f(-x, -y) = f(x, y)$. Dunque f non è un diffeomorfismo su A.

iii) Un insieme aperto $B \subset A$ su cui f è un diffeomorfismo non può contenere punti simmetrici rispetto all'origine. Fissato un punto $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ cerchiamo delle soluzioni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ del sistema di equazioni $f(x, y) = (\xi, \eta)$ con opportune restrizioni su (x, y) in modo tale che la soluzione sia unica. Il sistema di equazioni è

$$x^2 - y^2 = \xi, \quad 2xy = \eta.$$

Dividiamo la seconda equazione per y. Per farlo occorre supporre $y \neq 0$. Si ottiene $x = \eta/2y$ che sostituita nella prima equazione fornisce

$$\frac{\eta^2}{4y^2} - y^2 = \xi.$$

Riordinando e risolvendo in y^2 si trovano le soluzioni

$$y^2 = \frac{-\xi \pm \sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{2}.$$

La soluzione col segno $-$ va scartata. L'equazione in y ha ora due soluzioni opposte. Scegliamo la soluzione positiva, ovvero richiediamo $y > 0$. Si trova

$$y = \sqrt{\frac{-\xi + \sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{2}}.$$

Dopo alcuni conti si ottiene allora anche

$$x = \operatorname{sgn}(\eta)\sqrt{\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{2}}.$$

In definitiva, con la restrizione $y > 0$ siamo stati in grado di trovare una soluzione (x, y) unica. Quindi, sull'insieme aperto $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, il semipiano superiore, la funzione f è iniettiva e dunque un diffeomorfismo. Un aperto che contiene strettamente B contiene necessariamente punti simmetrici rispetto all'origine. Quindi B è massimale.

$\square$

ESERCIZIO 8.2. Siano $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 + x + y > 0\}$ ed $f : A \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \log(1+x+y) - \mathrm{e}^{x(1+y)} + 1.$$

1) Provare che l'equazione $f = 0$ definisce implicitamente intorno a $0 \in \mathbb{R}^2$ una funzione φ definita in un intervallo $(-\delta, \delta)$ per qualche $\delta > 0$.
2) Esprimere φ' in funzione di φ e calcolare poi $\varphi'(0)$.
3) Calcolare $\varphi''(0)$.

Soluzione. 1) Chiaramente si ha $f \in C^\infty(A)$. Osserviamo che $f(0,0) = 0$. Le derivate parziali di f sono

$$f_x(x,y) = \frac{1}{1+x+y} - (1+y)\mathrm{e}^{x(1+y)}, \quad f_y(x,y) = \frac{1}{1+x+y} - x\mathrm{e}^{x(1+y)}.$$

Nel punto $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ si ha $f_x(0,0) = 0$ ed $f_y(0,0) = 1$. Per il Teorema della funzione implicita, l'insieme $\{f = 0\}$ si può esprimere in un intorno di $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ come il grafico di una funzione $\varphi \in C^\infty(-\delta,\delta)$ per qualche $\delta > 0$. Precisamente, esistono $\eta, \delta > 0$ tali che

$$\{(x,y) \in (-\delta,\delta) \times (-\eta,\eta) : f(x,y) = 0\} = \{(x,\varphi(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in (-\delta,\delta)\}.$$

2) Dal teorema della funzione implicita sappiamo che

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))} = -\frac{1-(1+\varphi(x))(1+x+\varphi(x))\mathrm{e}^{x(1+\varphi(x))}}{1-x(1+x+\varphi(x))\mathrm{e}^{x(1+\varphi(x))}}.$$

Nel punto $x = 0$ si trova $\varphi'(0) = 0$.

3) La derivata parziale seconda di f in x è

$$f_{xx}(x,y) = -\frac{1}{(1+x+y)^2} - (1+y)^2\mathrm{e}^{x(1+y)},$$

e quindi $f_{xx}(0,0) = -2$.

La derivata seconda di φ in un generico punto è

$$\varphi'' = -\frac{[f_{xx}(x,\varphi) + f_{xy}(x,\varphi)\varphi']f_y(x,\varphi) - [f_{xy}(x,\varphi) + f_{yy}(x,\varphi)\varphi']f_x(x,\varphi)}{(f_y(x,\varphi))^2}.$$

Usando $\varphi'(0) = 0$ e $f_x(0,0) = 0$ si ottiene

$$\varphi''(0) = -\frac{f_{xx}(0,0)}{f_y(0,0)} = 2.$$

$\square$

CAPITOLO 9

Esercizi

1. Serie numeriche

1.1. Serie geometria e serie telescopiche.

Esercizio 1. Calcolare esplicitamente la somma della seguenti serie

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}, \quad \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

Esercizio 2. Per $0 \le r < 1$ ed $x \in \mathbb{R}$ calcolare la somma delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\sin nx}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\cos nx}{n}.$$

1.2. Criteri del confronto, radice, rapporto e condensazione.

Esercizio 3. Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche:

$$\text{i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+\mathrm{e}^n}{(n+1)!}; \quad \text{ii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{3^n+5^n}; \quad \text{iii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}\ ; \quad \text{iv)} \sum_{n=1}^{\infty} \Big|\sin(\sin n)\Big|^n.$$

Esercizio 4. Studiare la convergenza delle seguenti serie:

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2+1}; \quad \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\log(n+1)}; \quad \text{iii)} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{x^{2n}+|2x|^n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 5. Al variare dei numeri reali $a, b > 0$ discutere la convergenza delle serie:

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} n\log(1+a^n); \quad \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+b^n}; \quad \text{iii)} \sum_{n=0}^{\infty} a^{\sqrt{n}}; \quad \text{iv)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log(1+a))^{\log n}}.$$

Esercizio 6. Discutere la convergenza delle seguenti serie:

$$\text{i)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n!)^{\alpha}},\ \alpha > 0; \quad \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} x^{(\log n)^{\alpha}},\ 0 < x < 1 \text{ e } \alpha > 0.$$

Esercizio 7. Al variare del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ discutere la convergenza delle serie:

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \log\Big(\frac{n^2+1}{n^2}\Big); \quad \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}(\sqrt{1+n^4}-n^2); \quad \text{iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{\alpha}+1}.$$

Esercizio 8. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x>0} \Big(\frac{x}{1+x^n}\Big)^n.$$

Esercizio 9. Provare che la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log\log n}}$ diverge.

Esercizio 10. Al variare di $x \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{nx}(n+1)^{n+2}}{(n+3)!}.$$

1.3. Serie a segno alterno. Convergenza assoluta.

Esercizio 11. Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza semplice e assoluta delle serie

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}\Big(\frac{x}{x+1}\Big)^{n+1}$; ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n2^n\big(\sin(2x)\big)^n}{n^2+1}$; iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\log n}$.

Esercizio 12. Studiare la convergenza semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\Big(1-n\log\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Big).$$

Esercizio 13. Sia $0<a<1$ un numero reale.

i) Definita $a_n \in (-1,0)$ tramite la relazione $\sqrt[n]{a} = 1 + a_n$, $n \in \mathbb{N}$, provare che

$$|a_n| \le \frac{1}{n}\Big(\frac{1-a}{a}\Big), \quad n \ge 1.$$

ii) Studiare la convergenza semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt[n]{a}}{\log^2 n + 1}.$$

Esercizio 14. Al variare di $x \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n(x^2-3x+2)^n}{2^n(n^2+4)}.$$

Esercizio 15. Al variare del numero reale $x>1$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(\log x)^{1/n}}{n}.$$

1.4. Criterio del confronto asintotico.

Esercizio 16. Al variare di $\alpha, \beta > 0$ studiare la convergenza delle serie

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sqrt[3]{1+\frac{\alpha}{n}} - \sqrt{1+\frac{\beta}{n}}\Big); \quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos(1/n^\alpha)}{[1-\cos(1/n)]^\beta}.$$

Esercizio 17. Al variare del parametro $\alpha \ge 0$, studiare la convergenza delle serie numeriche:

$$1)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\sin(1/n^\alpha)\log\left(\frac{n-1}{n}\right)}{\sqrt{n+1}\arctan(n)}; \quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha\left(\sqrt[3]{1+1/n^2} - \cos(1/n)\right).$$

Esercizio 18. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4/3}\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \sqrt[3]{1+n}}{\log(1+n^2)}.$$

Esercizio 19. Studiare la convergenza delle seguenti serie al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^\alpha}\Big[\frac{1}{n} - \arctan\frac{1}{n}\Big]\log n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}\log\Big(\frac{n^2+1}{n^2}\Big).$$

1.5. Esercizi generali sulle serie.

Esercizio 20. Sia $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale infinitesima tale che $q_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Mostrare tramite esempi che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+q_n}}$ può sia convergere che divergere.

Esercizio 21. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale tale che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e supponiamo che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converga. Provare che anche la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{1-\frac{1}{n}}$ converge.

Esercizio 22. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni reali tali che $b_n \neq 0$ e $a_n+b_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{a_n}{b_n}\Big)^2$$

convergano. Provare che converge anche la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n+b_n}$.

Esercizio 23. Sia $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una funzione non negativa tale che: a) $\varphi(0) = 0$; b) φ è strettamente crescente; c) φ è continua.

1) Provare che per ogni successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vale l'implicazione

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(|a_n|) < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(|a_n|^2) < \infty.$$

2) Determinare il sottoinsieme minimo delle ipotesi a), b) e c) su $\varphi \geq 0$ tale che sia vera l'implicazione $(*)$.

Esercizio 24. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale positiva e crescente. Provare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{a_{n-1}}{a_n}\Big)$$

converge se e solo se esiste finito il limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$.

Suggerimento. Serie telescopiche. In una direzione, può essere utile usare $\log(1+x) \leq x$.

Esercizio 25. Sia $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, e supponiamo che la serie complessa $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ converga. Dimostrare che

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} a_n = 0.$$

Esercizio 26. Mostrare che per ogni $p > 0$ si ha l'identità
$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^p}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+pn}.$$

Esercizio 27. Sia $\beta \in \mathbb{R}$ e si definisca per ricorrenza la successione
$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{n^\beta} \sin a_n \quad \text{per } n \geq 0. \end{cases}$$
Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Esercizio 28. Sia Q un quadrato di lato 2 e sia Q_n, $n \geq 1$, una successione di quadrati tali che Q_n abbia lato $1/n$. È possibile disporre tutti i quadrati Q_n dentro il quadrato Q senza che si sovrappongano fra loro?

2. Integrali impropri

Esercizio 29. Al variare del parametro $\alpha \geq 0$, studiare la convergenza e la convergenza assoluta dell'integrale improprio
$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x \log x}{x^\alpha} dx.$$

Risposte. Per $\alpha > 1$ si ha convergenza assoluta (e quindi anche semplice); per $0 < \alpha \leq 1$ non si ha convergenza assoluta ma c'è convergenza semplice; per $\alpha = 0$ non c'è convergenza semplice.

Esercizio 30. Calcolare i seguenti integrali impropri
$$1)\ \int_0^{\infty} \frac{\log x}{(x+1)^2} dx; \quad 2)\ \int_0^{\infty} x^{-2} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\, dx; \quad 3)\ \int_0^{\infty} e^{-\beta x} \cos(\alpha x)\, dx, \quad \beta > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 31. Stabilire se convergono i seguenti integrali impropri
$$1)\ \int_0^{\infty} \sin^2(x)\, dx; \quad 2)\ \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\sin(x)}}\, dx; \quad 3)\ \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Esercizio 32. Stabilire se convergono assolutamente i seguenti integrali impropri
$$1)\ \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx; \quad 2)\ \int_0^{\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}} \cos x\, dx; \quad 3)\ \int_1^{\infty} \Big(\frac{1}{x} - \tan\frac{1}{x}\Big) \sin x\, dx.$$

Esercizio 33. Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che converga ciascuno dei seguenti integrali impropri
$$1)\ \int_0^1 \frac{(1-\cos x)^\alpha}{\tan x - x}\, dx; \quad 2)\ \int_0^1 \frac{\sin(x^\alpha)}{\log(1+x)}\, dx;$$
$$3)\ \int_0^{\infty} \frac{\arctan\sqrt{x} - \pi/2}{x^\alpha}\, dx; \quad 4)\ \int_2^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\log^\alpha x} dx.$$

Esercizio 34. Studiare la convergenza dei seguenti integrali oscillanti
$$1)\ \int_2^{\infty} \frac{\sin x}{\log x}\, dx; \quad 2)\ \int_1^{\infty} \sin(x) \arcsin\big(\frac{1}{x}\big)\, dx; \quad 3)\ \int_0^{\infty} x \sin(x^4)\, dx.$$

Esercizio 35. i) Determinare tutti i parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che il seguente integrale improprio converga

$$\int_0^\infty \frac{1 + x^\beta}{x^\alpha(1 + x^2)} dx.$$

ii) Rappresentare i parametri ammissibili nel piano cartesiano $\alpha\beta$.

3. Curve

Esercizio 36. Siano $L > 0$ ed $\alpha \geq 0$ due parametri fissati. Calcolare la lunghezza della curva $\gamma : [L, L] \to \mathbb{R}^3$

$$\gamma(t) = (\alpha \cosh t \, \cos t, \alpha \cosh t \, \sin t, \alpha t), \quad t \in [-L, L].$$

Disegnare il supporto di γ. Risp. $2\sqrt{2}\alpha \sinh L$.

Esercizio 37. Sia $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ la curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t^2)$, $t \in [0, \pi]$.

1) Verificare che γ è regolare, calcolare il campo tangente unitario T e disegnare il supporto della curva.
2) Data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \sqrt{|z|}$, calcolare l'integrale

$$\int_\gamma f \, ds.$$

Risp. $[(1 + 4\pi^2)^{3/2} - 1]/12$.

Esercizio 38. Si consideri la curva piana $\gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \Big(\frac{t^3}{3} - t, (\log t)^2\Big), \quad t > 0.$$

i) Stabilire se γ è semplice e se è regolare.
ii) Se possibile, calcolare il campo tangente unitario $T(t)$ e poi calcolare i limiti

$$\lim_{t \to 1\pm} T(t).$$

iii) Disegnare il supporto di γ.

Esercizio 39. Si consideri il tratto di cicloide $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Posto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$, si consideri la funzione $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x\sqrt{y}$. Calcolare l'integrale di f lungo γ

$$I = \int_\gamma f \, ds.$$

Esercizio 40. Sia $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva piana data dall'equazione polare $\varrho = 1 - \cos \vartheta$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$. Disegnare il supporto di γ e calcolare la sua lunghezza.

Risp. $L = 8$. La curva γ è la cardioide.

Esercizio 41. Provare che la curva piana $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = \big(t, t \sin(1/t)\big)$ quando $t \in (0, 1]$ e $\gamma(0) = (0, 0)$ non è rettificabile.

Esercizio 42. Sia $\gamma_n : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di curve e supponiamo che per ogni $t \in [0,1]$ esista il limite

$$\gamma(t) = \lim_{n\to\infty} \gamma_n(t).$$

Provare che $L(\gamma) \le \liminf_{n\to\infty} L(\gamma_n)$.

Esercizio 43. Siano $f, F \in C^2([0,1])$ due funzioni convesse tali che $f \le F$ in tutti i punti, $f(0) = F(0)$ ed $f(1) = F(1)$. Consideriamo le curve $\gamma(t) = (t, f(t))$ e $\Gamma(t) = (t, F(t))$. Provare che $L(\Gamma) \le L(\gamma)$.

4. Spazi metrici. Funzione distanza

Esercizio 44. Verificare gli assiomi della distanza nei seguenti esempi.

i) $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$.
ii) $X = \mathbb{R}^n$, $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$, la distanza Euclidea su $\mathbb{R}^n$.
iii) $X = \mathbb{N}$, $d(n,m) = \left|\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m}\right|$.
iv) $X = C([0,1])$, $d(f,g) := \max_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|$, cioè X è lo spazio delle funzioni continue sull'intervallo $[0,1] \subset \mathbb{R}$ con la metrica della *convergenza uniforme*.

Esercizio 45. Su $\mathbb{R}^2$ definiamo la funzione $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ nel seguente modo

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y| & \text{se } x, y \in \mathbb{R}^2 \text{ sono collineari con } 0, \\ |x| + |y| & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Verificare che $(\mathbb{R}^2, d)$ è uno spazio metrico. Disegnare le palle di questo spazio metrico.

Esercizio 46. Quali tra le seguenti funzioni $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0,\infty)$ sono distanze su $\mathbb{R}$?

i) $d(x,y) = \begin{cases} x^3 - y^3 & \text{se } x \ge y \\ y - x & \text{se } y \ge x \end{cases}$.
ii) $d(x,y) = |x-y| + |x^3 - y^3|$.
iii) $d(x,y) = x^2 + y^2 + xy$.
iv) $d(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$.

Esercizio 47. Sia $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ e definiamo una funzione su $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ come segue:

$$d(x,y) = |\arctan x - \arctan y| \qquad \text{per ogni } \ x, y \in \mathbb{R}^*,$$

dove $\arctan(\pm\infty) = \pm\pi/2$. Verificare che la funzione d è una distanza su $\mathbb{R}^*$. Quale è il diametro di $\mathbb{R}^*$ con questa distanza?

Esercizio 48. Sia $\alpha \in (0,1]$ e definiamo la funzione $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$

$$d(x,y) = |x-y|^\alpha, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

dove $|\cdot|$ indica la norma Euclidea di $\mathbb{R}^n$. Provare che $(\mathbb{R}^n, d)$ è uno spazio metrico.

Esercizio 49. Sia $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ la funzione così definita:

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y| & \text{se } x, y \text{ e } 0 \text{ sono collineari,} \\ |x| + |y| & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Provare che d è una metrica su $\mathbb{R}^2$ e descrivere (graficamente) le palle in questa metrica.

Esercizio 50. Definiamo le funzioni $|\cdot|_1, |\cdot|_\infty : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$

$$|x|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|, \quad |x|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Provare che $(\mathbb{R}^n, |\cdot|_1)$ e $(\mathbb{R}^n, |\cdot|_\infty)$ sono spazi normati e che come spazi metrici sono completi.

Esercizio 51. Sia $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0,\infty)$ la funzione

$$d(x,y) = \arctan(|x-y|), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Provare che $(\mathbb{R}, d)$ è uno spazio metrico. Stabilire se tale spazio metrico è completo.

Esercizio 52. Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ sia $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1,\ldots,n}$ una matrice $n \times n$ simmetrica tale che $x \mapsto A(x)$ sia continua, ovvero $x \mapsto a_{ij}(x)$ è continua per ogni $i, j = 1, \ldots, n$. Siano $\lambda_1(x) \le \ldots \le \lambda_n(x) \in \mathbb{R}$ gli autovalori di $A(x)$. Per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ vale

$$\lambda_1(x)|v|^2 \le \langle A(x)v, v\rangle \le \lambda_n(x)|v|^2.$$

Supponiamo che $\lambda_1 \ge 0$. Per ogni curva $\gamma \in C^1([0,1];\mathbb{R}^n)$, o più in generale C^1 a tratti su $[0,1]$, definiamo la lunghezza

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \langle A(\gamma(t))\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle^{1/2} dt.$$

Quando $A(x)$ è la matrice identità si ottiene la lunghezza Euclidea di γ.

Dati due punti $x, y \in \mathbb{R}^n$ definiamo

$$d(x,y) = \inf\big\{\ell(\gamma) : \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n \ C^1 \text{ a tratti con } \gamma(0) = x \text{ e } \gamma(1) = y\big\}.$$

1) Supponiamo che esista $m > 0$ tale che $\lambda_1(x) \ge m$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Provare che $(\mathbb{R}^n, d)$ è uno spazio metrico.
2) Supponiamo in aggiunta che esista $M > 0$ tale che $\lambda_n(x) \le M$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Provare che $(\mathbb{R}^n, d)$ è uno spazio metrico completo.

Lo spazio metrico $(\mathbb{R}^n, d)$ è un esempio di "varietà Riemanniana".

Esercizio 53. Sia $V = C([0,1])$. 1) Provare che la funzione $\|\cdot\|_2 : V \times V \to [0,\infty)$ così definita

$$\|f\|_2 = \Big(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\Big)^{1/2}$$

è una norma su V. Provare preliminarmente che per ogni $f, g \in V$ vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\Big|\int_0^1 f(x)g(x)dx\Big| \le \|f\|_2 \|g\|_2$$

2) Dire se il corrispondente spazio metrico è completo.

5. Limiti in più variabili

ESERCIZIO 54. Determinare il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ su cui è definita ciascuna delle seguenti funzioni:

i) $f(x,y) = \sqrt{xy + \log x}$;
ii) $g(x,y) = \sqrt{xe^y - ye^x}$;
iii) $h(x,y) = \sqrt{xy(xy-1)}$.

ESERCIZIO 55. Usando la definizione, verificare la continuità nei punti specificati delle funzioni sotto definite:

(1) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ nel punto $(0,1)$.
(2) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ nel punto $(0,1)$.

ESERCIZIO 56. Stabilire se esistono ed eventualmente calcolare i seguenti limti:

$$\text{i)} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^4)}{x^2+y^2}; \qquad \text{ii)} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^4+y^4)}{x^2+y^2}.$$

ESERCIZIO 57. Stabilire se la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

è continua nel punto $(0,0)$.

ESERCIZIO 58. Determinare tutti i valori del parametro $\alpha > 0$ tali che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y|x|^\alpha}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

sia continua nel punto $(0,0)$.

ESERCIZIO 59. Per la funzione $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ sotto definita, rispondere ai seguenti quesiti.

(1) Verificare che $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$ non è prolungabile con continuità in $(0,0)$.
(2) Verificare che $f(x,y) = \frac{(y^2-x)^2}{x^2+y^4}$ non è prolungabile con continuità in $(0,0)$.
(3) Verificare che $f(x,y) = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$ è prolungabile per continuità in $(0,0)$.
(4) Per la funzione $f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ calcolare il limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

ESERCIZIO 60. Per la funzione $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ sotto definita, rispondere ai seguenti quesiti.

(1) Verificare che $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$ non è prolungabile con continuità in $(0,0)$.
(2) Verificare che $f(x,y) = \frac{(y^2-x)^2}{x^2+y^4}$ non è prolungabile con continuità in $(0,0)$.
(3) Verificare che $f(x,y) = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$ è prolungabile per continuità in $(0,0)$.
(4) Per la funzione $f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ calcolare il limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Esercizio 61. Sia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione così definita:

$$f(x,y) := \frac{xy}{x^2+y^2}$$

per ogni $(x,y) \neq (0,0)$. Usando la definizione, verificare che

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = \frac{1}{2} = f(1,1),$$

ovvero che f è continua in $(1,1)$. Dimostrare inoltre che f non può essere prolungata con continuità in $(0,0)$, cioè che non esiste $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Verificare infine che f è limitata nel suo dominio di esistenza.

6. Convergenza uniforme e serie di funzioni

6.1. Successioni di funzioni.

Esercizio 62. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{(n+1)x + n^2x^3}{1+n^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ su $\mathbb{R}$.
c'è

Esercizio 63. Costruire funzioni $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tali che:
1) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
2) per ogni $-\infty \leq a < b \leq \infty$ la convergenza al punto 1) non è uniforme su (a,b).

Esercizio 64. Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni periodiche, ciascuna di periodo $T_n > 0$, tali che:

1) ogni f_n è continua;
2) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} T_n < \infty$;
3) $f_n \to f$ uniformemente su $\mathbb{R}$, per $n \to \infty$.

Provare che f è periodica.

Esercizio 65. Sappiamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha la convergenza puntuale

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n = \mathrm{e}^x.$$

Discutere la convergenza uniforme in tale limite.

Esercizio 66. Studiare la convergenza puntuale e uniforme su $\mathbb{R}$ della successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ così definita

$$f_n(x) = \frac{1+x^n}{n+x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 67. Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\log(1+\mathrm{e}^{nx}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
ii) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione delle derivate $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$.

Esercizio 68. Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, la successione di funzioni

$$f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
ii) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione delle derivate $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$.

6.2. Convergenza uniforme e integrale.

Esercizio 69. Costruire una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che:
1) f è Riemann-integrabile.
2) Detto $A = \big\{x \in [0,1] : \ f \text{ non è continua in } x\big\}$ l'insieme dei punti di discontinuità di f, si ha $\bar{A} = [0,1]$.

Esercizio 70. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \Big(\frac{1}{n} + \sin^2 x\Big)^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Calcolare quindi il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi f_n(x)\, dx.$$

Esercizio 71. i) Provare che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1-t^2)^n dt = 0.$$

ii) Si consideri la successione di funzioni $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{\displaystyle\int_0^x (1-t^2)^n dt}{\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n dt}, \quad x \in [-1,1].$$

Calcolare il limite puntuale

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in [-1,1],$$

e discutere la convergenza uniforme.

Esercizio 72. Per ogni $x \in [-1,1)$ calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{2n+1}.$$

Esercizio 73. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \int_1^n \frac{n}{ny^2 + x^2} dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Calcolare il limite puntuale

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

ii) Studiare la convergenza uniforme nel limite precedente.

7. Serie di funzioni e di potenze

Esercizio 74. Al variare di $x > 0$ studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-\log x)\log^n x,$$
e calcolarne la somma.

Esercizio 75. Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni
$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{nx^2-n^2x}.$$

Esercizio 76. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n\mathrm{e}^{nx}},\quad x \geq 0.$$

Esercizio 77. Per $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza della serie di potenze complessa $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n^\alpha}$, $z \in \mathbb{C}$.

Esercizio 78. Per ciascun $\alpha > 0$ studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{(n!)^\alpha},\quad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 79. Calcolare la somma della serie in $z \in \mathbb{C}$
$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n \quad \text{dove} \quad s_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}.$$

Esercizio 80. Sia $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ la funzione
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\quad x \in (-R, R),$$
dove $0 < R \leq \infty$ è il raggio di convergenza della serie di potenze. Provare che $f \in C^\infty(-R, R)$. Verificare inoltre che
$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},\quad n \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 81. Per ogni $x \in (-1, 1)$ calcolare la somma della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n.$$

Esercizio 82. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}+\cos x},\quad x \in \mathbb{R}.$$
Provare che $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Esercizio 83. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{(x^2-1)^n}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Provare che la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge uniformemente per $x \in [-1,1]$.

ii) Verificare che

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

per ogni $x \in [-1,1]$.

7.1. Topologia di uno spazio metrico.

Esercizio 84. Sia $A = \left\{\frac{n}{1+n},\ n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$ con la distanza Euclidea. Descrivere gli insiemi A° e $\overline{A}$.

Esercizio 85. Determinare interno, frontiera e chiusura dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$. Dire se sono aperti, chiusi (o né aperti né chiusi). Dire se sono compatti e/o se hanno chiusura compatta:

(1) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$;
(2) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 1\}$;
(3) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \neq 1,\ y \geq x^2\}$;
(4) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|+|y| < 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\}$.

Esercizio 86. Sia $\mathbb{R}$ munito della distanza Euclidea e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Provare o confutare tramite controesempi le seguenti affermazioni: i) $f(A)$ aperto $\Rightarrow A$ aperto; ii) A aperto $\Rightarrow f(A)$ aperto; iii) $f(A)$ chiuso $\Rightarrow A$ chiuso; ii) A chiuso $\Rightarrow f(A)$ chiuso.

Esercizio 87. Provare che un insieme aperto $A \subset \mathbb{R}$ è l'unione numerabile di intervalli aperti disgiunti.

Esercizio 88. Siano (X,d) uno spazio metrico e $A \subset X$ un suo sottoinsieme. Provare le seguenti affermazioni:

i) A° è il più grande insieme aperto contenuto in A;
ii) $\overline{A}$ è il più piccolo insieme chiuso che contiene A.

Esercizio 89. Sia (X,d) uno spazio metrico. Per $x_0 \in X$ ed $r > 0$ definiamo

$$B_r(x_0) = \left\{x \in X : d(x,x_0) < r\right\},$$
$$K_r(x_0) = \left\{x \in X : d(x,x_0) \leq r\right\},$$
$$S_r(x_0) = \left\{x \in X : d(x,x_0) = r\right\}.$$

Provare che $\partial B_r(x_0) \subset S_r(x_0)$ e che $\overline{B_r(x_0)} \subset K_r(x_0)$. Mostrare tramite esempi che le inclusioni possono essere strette.

Esercizio 90. Sia X un insieme non vuoto e sia $d : X \times X \to \mathbb{R}$ la funzione così definita:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y, \\ 1 & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

1) Provare che (X,d) è uno spazio metrico.
2) Descrivere le palle in X.
3) Descrivere gli insiemi aperti.
4) Caratterizzare gli insiemi compatti in X
5) Caratterizzare gli insiemi connessi in X.
6) Provare che (X,d) è completo.

Esercizio 91. Costruire una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che:
1) f è Riemann-integrabile.
2) Detto $A = \{x \in [0,1] : \ f \text{ non è continua in } x\}$ l'insieme dei punti di discontinuità di f, si ha $\bar{A} = [0,1]$.

Esercizio 92. Mostrare tramite esempi che ciascuna delle tre ipotesi: a) K compatto; b) f continua; e c) f_n continua per ogni $n \in \mathbb{N}$ è necessaria per la validità del Teorema 4.44.

7.2. Spazi metrici completi e punti fissi.

Esercizio 93. Siano (X,d) uno spazio metrico, $A \subset X$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua su A. Provare che per ogni $x_0 \in \bar{A}$ esiste finito il seguente limite

$$\bar{f}(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

In altri termini, f si estende in modo continuo su $\bar{A}$.

Esercizio 94. Determinare tutti i numeri $\alpha \geq 0$ tali che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt{1 + \alpha x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

sia una contrazione rispetto alla distanza Euclidea.

Esercizio 95. Siano $\lambda \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^n$ e consideriamo la funzione $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$T(x) = \lambda x + b, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

1) Calcolare una formula per l'iterazione $T^k(x_0) = T \circ \ldots \circ T(x_0)$ k volte, dove $x_0 \in \mathbb{R}^n$ è un punto fissato;
2) Stabilire per quali valori di λ la trasformazione T è una contrazione rispetto alla distanza Euclidea e per tali valori calcolare il limite di $T^k(x_0)$ per $k \to \infty$.

Esercizio 96. Sia $X = C([0,1])$ con la sup-norma. Provare che per $\alpha > 0$ l'applicazione $T : X \to X$

$$T(f)(x) = \mathrm{e}^{-\alpha x} \int_0^x \mathrm{e}^{\alpha t} f(t)\, dt$$

è una contrazione.

Esercizio 97. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione con costante di Lipschitz $L = \mathrm{Lip}(f) < 1$. Provare che la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$F(x, y) = \big(x + f(y), y + f(x)\big), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

è iniettiva e suriettiva. È vero che $F^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è Lipschitziana?

Esercizio 98. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione funzionale

$$\sin x + \int_0^x \sqrt{1 + f'(t)^2}dt = \alpha f(x), \quad x \in [0, 1].$$

i) Provare che per $|\alpha| > 1$ l'equazione ha un'unica soluzione $f \in C^1([0, 1])$.
ii) Provare che per $|\alpha| \le 1$ l'equazione non ha soluzione.

Esercizio 99. Sia X uno spazio metrico compatto e sia $T : X \to X$ un'applicazione tale che $d(T(x), T(y)) < d(x, y)$ per ogni $x, y \in X$ tali che $x \neq y$. Provare che T ha un unico punto fisso su X.

7.3. Insiemi compatti.

Esercizio 100. Stabilire se i seguenti sottoinsiemi $H, K \subset \mathbb{R}^2$ sono compatti:

$$K = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 - x^2 + y^2 \le 1\big\},$$
$$H = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x^3 + xy + y^3 \le 1\big\}.$$

Esercizio 101. Sia (X, d) uno spazio metrico e siano $K_1, \dots, K_n \subset X$ insiemi compatti. Provare che $K_1 \cup \dots \cup K_n$ e $K_1 \cap \dots \cap K_n$ sono ancora compatti. È vero che l'unione numerabile di compatti è ancora un insieme compatto? È vero che l'intersezione numerabile di compatti è ancora un insieme compatto?

Esercizio 102. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $K \subset X$ un sottoinsieme chiuso. Provare che:

(1) Se X è compatto allora anche K è compatto.
(2) Se X è completo allora anche K è completo con la distanza ereditata da X.

Esercizio 103. Sia X uno spazio metrico compatto, e siano $f, f_n \in C(X; \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$. Diciamo che la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge continuamente (o in modo continuo) ad f su X se per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di X convergente ad $x \in X$ si ha $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$. Dimostrare che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge continuamente ad f su X se e solo se converge uniformemente ad f su X.

8. Funzione esponenziale

Esercizio 104. Dedurre le formule di addizione per seno e coseno per $x, y \in \mathbb{R}$

$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y),$$
$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y),$$

a partire dall'identità funzionale per l'esponenziale $\exp(z + \zeta) = \exp(z)\exp(\zeta)$ con $z, \zeta \in \mathbb{C}$ e dalle identità di Eulero

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}.$$

Esercizio 105. Sia $(a_n)_{n\in}$ una successione di numeri reali positivi, $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Provare che

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)^{1/n} \leq \mathrm{e}\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Esercizio 106. Provare che la costante di Eulero e non è un numero razionale.

Esercizio 107. Provare che il polinomio della variabile reale $x \in \mathbb{R}$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!}$$

non ha zeri reali.

Esercizio 108. Provare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} = \int_0^1 x^{-x} dx.$$

Idea: usare lo sviluppo di Taylor di e^x e integrare per parti.

Esercizio 109. Siano $m, n \in \mathbb{N}$ tali che $m \leq n$ e siano $a_m \geq a_{m+1} \geq \ldots \geq a_m \geq 0$ numeri reali. Provare che per ogni $x \in (0, 2\pi)$ vale la disuguaglianza

$$\Big|\sum_{k=m}^{n} a_k \mathrm{e}^{ikx}\Big| \leq \frac{a_m}{|\sin(x/2)|}.$$

Esercizio 110. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di interi con $a_n \geq 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Provare che ogni numero reale $x \in [0, 1)$ si scrive nella forma

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{a_0 a_1 \ldots a_n},$$

con $x_n \in \{0, 1, \ldots, a_n - 1\}$.

9. Calcolo differenziale

9.1. Differenziabilità. Funzioni C^1.

Esercizio 111. Detto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$, sia $f : A \to \mathbb{R}^2$ la funzione

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^{xy} + y\log x \\ y^{xy} - x\log y \end{pmatrix}.$$

Calcolare la matrice Jacobiana di f in un generico punto del dominio. È vero che

$$\det Jf(x, x) \neq 0 \quad \text{per ogni } x > 0?$$

Esercizio 112. Siano $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funzioni tali che $f(0) = g(0) = 0$ e, per $x^2 + y^2 \neq 0$,

$$f(x, y) = \frac{y|x|^\alpha}{x^4 + y^2}, \quad g(x, y) = y \sin\Big(\frac{|x|^\beta}{x^2 + y^4}\Big),$$

dove $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ sono parametri.

1) Calcolare tutti gli α tali che f sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.
2) Calcolare tutti i β tali che g sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

3) Calcolare tutti i $\gamma > 0$ tali che
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\Big(\frac{|x|^\gamma}{x^4+y^2}\Big) = 0.$$

Esercizio 113. Sia $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, la funzione
$$f(x) = \frac{1}{|x|}, \quad |x| \neq 0,$$
dove $|x| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$. Calcolare in un generico punto $x \neq 0$ la derivata direzionale di f lungo la direzione $v = \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}$.

Esercizio 114.

(1) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la seguente funzione:
$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin\Big(\dfrac{1}{xy}\Big) & xy \neq 0, \\ 0 & xy = 0. \end{cases}$$
Provare che f è continua in $\mathbb{R}^2$ ma non è derivabile nel punto $(1,0)$.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la seguente funzione:
$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2 \sin\Big(\dfrac{1}{xy}\Big) & xy \neq 0, \\ 0 & xy = 0. \end{cases}$$
Provare che f è differenziabile in ogni punto di $\mathbb{R}^2$ ma non è di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

Esercizio 115. In dipendenza da $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$$f(x,y) = \begin{cases} (2x^2+y^2)^\alpha \sin\Big(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big) & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Studiare la continuità e la differenziabilità di f al variare di α.
2) Stabilire se esistono α tali che f sia differenziabile su $\mathbb{R}^2$ ma non di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

Esercizio 116. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^6}{x^6+y^8} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Provare che f è continua su $\mathbb{R}^2$.
2) Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 117. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^4+y^6} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Provare che f è continua su $\mathbb{R}^2$.
2) Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 118. Costruire una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, tale che:

i) La derivata direzionale $f_v(0)$ esiste finita per ogni $v \in \mathbb{R}^n$;
ii) La trasformazione $v \mapsto f_v(0)$ è lineare;
iii) f non è differenziabile in 0.

Esercizio 119. Costruire un esempio di funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, tale che:

i) Per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ con $|v| = 1$ esiste la derivata direzionale $f_v(0)$ e si ha
$$f(tv) = f(0) + tf_v(0) + E_v(t), \quad t \in \mathbb{R},$$
con $|E_v(t)| \leq E(t)$ per una funzione $E(t) = o(t)$ per $t \to 0$.
ii) f non è differenziabile in 0.

Esercizio 120. Una funzione $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ si dice (positivamente) omogenea di grado $\alpha \in \mathbb{R}$ se $f(tx) = t^\alpha f(x)$ per ogni $x \neq 0$ e $t > 0$.

Provare che se $f \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ è omogenea di grado α allora le sue derivate parziali sono omogenee di grado $\alpha - 1$. Verificare inoltre la formula di Eulero, per $x \neq 0$,
$$\langle \nabla f(x), x\rangle = \alpha f(x).$$

Esercizio 121. Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ e sia $f \in C(\bar{A}) \cap C^1(A)$ una funzione con derivate parziali f_x ed f_y uniformemente continue su A. Provare che esistono finite anche le seguenti derivate parziali al bordo
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x + t, 0) - f(x, 0)}{t} \quad \text{e}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y^+}(x, 0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x, t) - f(x, 0)}{t}.$$

Esercizio 122. Costruire una funzione $f \in C^1(A)$ con $A \subset \mathbb{R}^2$ insieme aperto tale che:

i) $\|df(x)\| \leq 1$ per ogni $x \in A$;
ii) f non è Lipschitziana in A.

Esercizio 123. Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un chiuso non vuoto e definiamo la funzione distanza $d : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$
$$d(x) = \text{dist}(x; K) = \inf_{y\in K} |x - y|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

1) Provare che l'inf è un min e che $\text{Lip}(d) = 1$ (se $K \neq \mathbb{R}^n$).
2) Sia $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ un punto di differenziabilità di d. Provare che x ha proiezione metrica unica su K.
3) Provare che d^2 verifica la disuguaglianza di semiconcavità
$$d(x + h)^2 + d(x - h)^2 - 2d(x)^2 \leq 2|h|^2, \quad x, h \in \mathbb{R}^n.$$

Esercizio 124. Calcolare il piano tangente in un generico punto della superficie 2-dimensionale $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + xy - z^2 + 1 = 0\}$. Tracciare un disegno approssimativo di M.

9.2. Funzioni di classe C^2.

Esercizio 125. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

i) Stabilire se $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$;
ii) Stabilire se $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Esercizio 126. Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$, la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} xy(-\log(x^2+y^2))^{1/2}, & 0 < x^2+y^2 < 1, \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

i) Provare che $f \in C^1(A)$;
ii) Provare che esistono $f_{xx}, f_{yy} \in C(A)$;
iii) Stabilire se $f \in C^2(A)$.

Esercizio 127. Sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la funzione $u(x) = |x|$. Provare che per $x \neq 0$ si ha $\det D^2u(x) = 0$.

Esercizio 128. Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso. Costruire una funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$K = \big\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\big\}.$$

Esercizio 129. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione tale che esistano tutte le derivate parziali

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}, \quad n, m \in \{0,1,2,\dots\}$$

in ogni punto di $\mathbb{R}^2$. È vero che f è allora necessariamente continua? Provare questa affermazione oppure esibire un controesempio.

9.3. Convessità.

Esercizio 130. Provare che se $A \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme convesso, allora anche la chiusura $\bar{A}$ e l'interno $\mathrm{int}(A)$ sono convessi.

Esercizio 131. Siano $f_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathscr{A}$, funzioni convesse. Supponiamo che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si abbia

$$f(x) = \sup_{\alpha \in \mathscr{A}} f_\alpha(x) < \infty.$$

Provare che la funzione f è convessa.

Esercizio 132. Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ una funzione tale che $Hf(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Provare che f è strettamente convessa. Mostrare anche che l'implicazione opposta non è vera.

Esercizio 133 (Disuguaglianza dei determinanti di Minkowski). Siano A, B due matrici $n \times n$ semidefinite positive. Provare che

$$\det(A+B)^{1/n} \geq \det(A)^{1/n} + \det(B)^{1/n}.$$

1) Discutere prima il caso $A = I$ matrice identità e $B = \Delta$ matrice diagonale. Usare il fatto che la funzione $t \mapsto \log(1+\mathrm{e}^t)$ è (strettamente) convessa.

2) Discutere il caso $A > 0$ tramite una diagonalizzazione di $A^{-1}B$.

Esercizio 134. Sia $f \in C(\mathbb{R}^n)$ una funzione superlineare:

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{f(x)}{|x|} = \infty.$$

Definiamo la funzione $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (la *trasformata di Legendre* di f)

$$f^*(\xi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \langle \xi, x\rangle - f(x), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

1) Provare che il sup è un max.
2) Verificare che f^* è convessa.
3) Calcolare f^* nel caso $f(x) = \frac{1}{2}|x|^2$.

Esercizio 135. Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ una funzione convessa e consideriamo l'applicazione $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = \nabla f(x)$ con $x \in \mathbb{R}^n$. Provare che f è iniettiva sull'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : Hf(x) > 0\}.$$

Esercizio 136. Sia $X = \{\varphi \in C^1([0,1]) : \varphi(0) = \alpha, \varphi(1) = \beta\}$ dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sono due costanti fissate. Consideriamo il funzionale $F : X \to \mathbb{R}$

$$F(\varphi) = \int_0^1 \sqrt{1 + \varphi'(t)^2}dt.$$

1) Ammettendo che F assume il valore minimo, provare che F ha un *unico* punto di minimo.
2) Determinare il punto di minimo φ.

Esercizio 137. Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ una funzione tale che $Hf(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Provare che f è strettamente convessa. Mostrare anche che l'implicazione opposta non è vera.

Esercizio 138. Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ una funzione convessa e consideriamo l'applicazione $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = \nabla f(x)$ con $x \in \mathbb{R}^n$. Provare che F è iniettiva sull'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : Hf(x) > 0\}.$$

Esercizio 139. Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un chiuso non vuoto e definiamo la funzione distanza $d : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$

$$d(x) = \mathrm{dist}(x; K) = \inf_{y\in K} |x - y|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

1) Provare che l'inf è un min e che $\mathrm{Lip}(d) = 1$ (se $K \neq \mathbb{R}^n$).
2) Sia $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ un punto di differenziabilità di d. Provare che x ha proiezione metrica unica su K.
3) Provare che d^2 verifica la disuguaglianza di semiconcavità

$$d(x + h)^2 + d(x - h)^2 - 2d(x)^2 \leq 2|h|^2, \quad x, h \in \mathbb{R}^n.$$

Esercizio 140. Sia $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Provare che il suo grafico $A = \big\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in [0,1]\big\} \subset \mathbb{R}^3$ ha misura nulla nello spazio.

9.4. Punti critici, massimi, minimi.

Esercizio 141. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = x^3 - y^3 + 3\alpha xy.$$

Determinare i punti critici di f ed eventuali punti di minimo/massimo locale/globale.

Esercizio 142. Siano $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le 2\pi\}$ ed $f : K \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \sin(2x)\cos(y).$$

i) Provare che f assume massimo e minimo su K;
ii) Calcolare i punti critici di f in K e classificarli;
iii) Tracciare un grafico qualitativo di f;
iv) Determinare l'insieme immagine $f(K)$.

Esercizio 143. Sia $\alpha > 0$ un parametro fissato e consideriamo l'insieme

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le \frac{1}{\alpha^2 + y^2}\right\}.$$

Provare che la funzione $f(x, y) = 2xy$ assume massimo su A e calcolarlo.

Esercizio 144. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$. Calcolare i punti critici di f e stabilire se sono punti di massimo/minimo locale.

Esercizio 145. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xyz$. Calcolare i punti critici di f e stabilire se sono punti di massimo/minimo locale.

Esercizio 146. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ il più grande insieme su cui la funzione

$$f(x, y) = |x^2 - 2x| - \log(y^2 + x) + \log x$$

è ben definita.

i) Calcolare i punti di estremo di f in A e classificarli;
ii) Stabilire se f ha punti di sella in A.

Esercizio 147. Per $\alpha > 1$ sia $K \subset \mathbb{R}^2$ il triangolo chiuso di vertici $(0, 0), (\alpha + 1, 0), (0, \alpha + 1)$ e sia $f : K \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x, y) = x^\alpha + y^\alpha + (2 + \alpha - x - y)^\alpha.$$

Calcolare l'immagine $f(K) \subset \mathbb{R}$.

Esercizio 148. Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto con interno non vuoto, $\mathrm{int}(K) \neq \emptyset$, e sia $f : K \to \mathbb{R}$ una funzione con queste proprietà: 1) f è continua su K; 2) f è differenziabile in $\mathrm{int}(K)$; f è costante su ∂K. Dimostrare che esiste almeno un punto $x \in \mathrm{int}(K)$ tale che $\nabla f(x) = 0$.

Esercizio 149. Trovare il minimo assoluto della funzione

$$f(\alpha, \beta) = \int_0^1 \left(\alpha t + \beta - \sin\frac{\pi t}{2}\right)^2 dt$$

al variare di $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Esercizio 150. Sia $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \le 4\}$. Calcolare il valore massimo della funzione $f(x, y) = x^2y^2$ su K.

Esercizio 151. Sia
$$f(x,y,z) = y^2 - 3|x|$$
definita sull'insieme $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 9z^2 \le 9\}$. Studiare qualitativamente f. In particolare, si determini l'immagine $f(K)$.

9.5. Equazioni differenziali alle derivate parziali.

Esercizio 152. Sia $\Delta : C^2(\mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R}^n)$ l'operatore differenziale del secondo ordine (operatore di Laplace)
$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$
Verificare che la funzione $u(x) = |x|^{2-n}$, $x \neq 0$, verifica $\Delta u(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. A patto che $n \ge 3$. La funzione u si dice *soluzione fondamentale* dell'equazione di Laplace.

Esercizio 153. Verificare che la funzione $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$, $n \ge 1$,
$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0,$$
verifica l'*equazione del calore*
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Delta u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0,$$
dove $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ è l'operatore di Laplace.

Esercizio 154. Siano $A = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq 0\big\}$ ed $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$,
$$f(x,y,z) = x^5 \sin\left(\frac{y^2 + z^2}{x^2}\right).$$

i) Stabilire se esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che f verifica l'equazione alle derivate parziali $xf_x + yf_y + zf_z = kf$ in tutti i punti di A.
ii) Stabilire se f può essere estesa con continuità su tutto $\mathbb{R}^3$.
iii) Stabilire se f può essere estesa su tutto $\mathbb{R}^3$ ad una funzione $C^1(\mathbb{R}^3)$.

Esercizio 155. Sia $f(x,y) = \log(\exp(x) + \exp(y))$, con $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Stabilire se la disuguaglianza
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 \ge 0$$
è verificata su tutto $\mathbb{R}^2$.

10. Forme differenziali

Esercizio 156. Stabilire se i seguenti insiemi sono contraibili (semplicemente connessi):
i) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \neq 0\}$ in $\mathbb{R}^3$;
ii) $B = \big\{x \in \mathbb{R}^n : \log(1 + |x|) \ge |x|/2\big\}$ in $\mathbb{R}^n$ con $n \ge 1$;
iii) $C = \big\{(x+y, xy) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\big\}$ in $\mathbb{R}^2$.

Risp. i) No; ii) Si; iii) Si.

Esercizio 157. Calcolare l'integrale della 1-forma differenziale ω lungo la curva γ assegnata:

i) $\omega = x^2dx + xydy$ in $\mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^2, t)$ con $t \in [-1, 1]$.
ii) $\omega = (x - z)dx + (1 - xy)dy + ydz$ in $\mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ con $t \in [0, 1]$.
iii) $\omega = 2x(x+y)dx+2y(x+y)dy$ in $\mathbb{R}^2$ lungo la curva γ con equazione polare $\varrho = k\vartheta$, dove $\vartheta \in [0, \pi/2]$ e $k \geq 0$ è un parametro fissato (spirale di Archimede).

Risp. i) 0; ii) 29/20; iii) $k^3(\pi^2 + 4\pi - 16)/2$.

Esercizio 158. Determinare tutti i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\omega = \frac{1}{(x^2 + y^2)^\alpha}\Big((x - y)dx + (x + y)dy\Big)$$

sia chiusa. Par tali valori ω è anche esatta su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$?

Risp. $\alpha + 1$; No.

Esercizio 159. Determinare tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^3$

$$\omega = (\alpha y + z)dx + (\alpha x + z)dy + (\alpha x + y)dz$$

sia chiusa. Par tali valori calcolare un potenziale di ω su $\mathbb{R}^3$.

Risp. $\alpha = 1$.

Esercizio 160. Si consideri la 1-forma differenziale nel piano

$$\omega = \Big(\log(x + y) + \frac{x}{x + y}\Big)dx + \frac{x}{x + y}dy.$$

i) Determinare il più grande insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ su cui ω è ben definita.
ii) Stabilire se ω è chiusa in A.
iii) Stabilire se ω è esatta in A ed eventualmente calcolarne un potenziale.

Risp. $f(x, y) = x \log(x + y)$.

Esercizio 161. Sia ω la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$\omega = \frac{1 - \sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}\big(xdx + ydy\big).$$

Calcolare l'integrale di ω lungo la curva γ di equazione polare $\varrho = \mathrm{e}^\vartheta$ con $\vartheta \in [0, \pi/2]$ (spirale logaritmica). Determinare preliminarmente un potenziale della forma.

Risp. $\mathrm{e}^{\pi/2} + \cos(\mathrm{e}^{\pi/2}) - 1 - \cos 1$.

Esercizio 162. Si consideri la forma differenziale su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$\omega = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}\big((x^2 - y^2)dx - 2xydy\big).$$

Stabilire se ω è chiusa oppure esatta, ed eventualmente calcolarne un potenziale.

11. Teoremi di invertibilità locale e di Dini

Esercizio 163. Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ una funzione tale che $\det(Jf(x)) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Provare che per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ l'insieme

$$f^{-1}(\{y\}) = \big\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = y\big\}$$

ha cardinalità al più numerabile.

Esercizio 164. Determinare tutti i valori del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \big(x + \lambda y, y - (\lambda+1)x^2\big)$$

sia un diffeomorfismo. Calcolare in questi casi la funzione inversa.

Esercizio 165. Discutere l'esistenza di soluzioni $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ in un intorno di $0 \in \mathbb{R}^4$ del sistema non lineare di equazioni

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{x+w} + xy + zw\mathrm{e}^{y+z} = 1 \\ y + \sin(xyz) + \cos(xzw) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 166. Discutere l'esistenza di soluzioni $x, y, z \in \mathbb{R}$ per il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x + \mathrm{e}^z + yz\sin(x) = 1 \\ z\mathrm{e}^z + \sin(xyz) + y^2x = 0. \end{cases}$$

Esercizio 167. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x,y,z) = z\mathrm{e}^{xy} + xy\mathrm{e}^z + xyz$.

i) Provare che l'equazione $f(x,y,z) = 0$ definisce intorno a 0 una funzione di classe C^∞ che esplicita una variabile in funzione delle altre due.
ii) Calcolare il gradiente di φ in $0 \in \mathbb{R}^2$.
iii) Provare che φ ha in $0 \in \mathbb{R}^2$ un punto di sella.

Esercizio 168. (Teorema della mappa aperta) Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $f \in C^1(A;\mathbb{R}^m)$ con $1 \leq m \leq n$. Supponiamo che sia $\text{rango}(J_f(x)) = m$ per ogni $x \in A$. Provare che f è aperta.

Esercizio 169. Sia $0 \leq p \leq 2$.

i) Provare che esiste una costante $0 < C_p < \infty$ tale che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ risulti
$$|x|^p|y|^{2-p} \leq C_p(x^2 + y^2).$$
ii) Calcolare la più piccola costante C_p che rende vera la disuguaglianza precedente.

Esercizio 170. Si consideri un parallelepipedo in $\mathbb{R}^3$ di volume V e di superficie laterale S. Provare che

$$V \leq \Big(\frac{S}{6}\Big)^{2/3},$$

e mostrare che si ha uguaglianza esattamente quando il parallelepipedo è un cubo.

Esercizio 171. Usando il Teorema sui moltiplicatori di Lagrange provare la seguente disuguaglianza fra la media geometrica e quella aritmetica

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n},$$

con $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ ed $n \in \mathbb{N}$.