Analisi Matematica 2 — Tema A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 14/6/2016

Esercizio 1 Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che converga ciascuno dei seguenti integrali impropri:

$$A = \int_1^2 \frac{t-1}{t^2(\log t)^{\alpha+1}}dt, \quad B = \int_2^\infty \frac{t-1}{t^2(\log t)^{\alpha+1}}dt, \quad C = \int_1^\infty \frac{t-1}{t^2(\log t)^{\alpha+1}}dt.$$

Risposta: $A)$ $\alpha \in$	; $B)$ $\alpha \in$	; $C)$ $\alpha \in$

Esercizio 2 Data una funzione $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ con $\varphi(0) = 0$, sia ω la forma differenziale in $\mathbb{R}^2$

$$\omega = \big(\varphi(y) - y\sin(xy)\big)dx + \big(1 - x\sin(xy)\big)dy.$$

i) Determinare φ in modo tale che ω sia esatta su $\mathbb{R}^2$.

ii) Per tale φ calcolare un potenziale $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ di ω.

iii) Calcolare l'integrale $I = \int_\gamma \omega$ lungo la curva γ di equazione polare $\varrho = \sin\vartheta$, $\vartheta \in [0, \pi/2]$.

Risposte: i) $\varphi =$	; ii) $f =$	; iii) $I =$

Esercizio 3 Al variare di $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \frac{x}{(1+|x|)^n}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

i) Studiare la convergenza puntuale della serie.

ii) Stabilire se la convergenza è uniforme su ogni intervallo $[\delta, \infty)$ con $\delta > 0$.

iii) Stabilire se la convergenza è uniforme su qualche intervallo $[0, \delta]$ per un $\delta > 0$.

Risposte: i) CP: $x \in$	; ii) CU su $[\delta, \infty)$:	; iii) CU su $[0, \delta]$:

Esercizio 4 Sia $\alpha > 0$ un parametro e consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2|y|^\alpha}{x^8 + |y|^3} & \text{se } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = y = 0. \end{cases}$$

i) Determinare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia continua su tutto $\mathbb{R}^2$.

ii) Determinare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia differenziabile nel punto $0 \in \mathbb{R}^2$.

Risposte: i) $\alpha \in$	; ii) $\alpha \in$

3 ore a disposizione

Analisi Matematica 2 — Tema B

Nome, cognome, matricola: — Scritto del 14/6/2016

Esercizio 1 Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che converga ciascuno dei seguenti integrali impropri:

$$A = \int_0^1 \frac{t\big(\log(1+t)\big)^\alpha}{(1+t)^2}dt, \quad B = \int_1^2 \frac{t\big(\log(1+t)\big)^\alpha}{(1+t)^2}dt, \quad C = \int_0^\infty \frac{t\big(\log(1+t)\big)^\alpha}{(1+t)^2}dt.$$

Risposta: $A)$ $\alpha \in$; $B)$ $\alpha \in$; $C)$ $\alpha \in$

Esercizio 2 Data una funzione $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ con $\varphi(0) = 0$, sia ω la forma differenziale in $\mathbb{R}^2$

$$\omega = \big(1 + y\cos(xy)\big)dx + \big(\varphi(x) + x\cos(xy)\big)dy.$$

i) Determinare φ in modo tale che ω sia esatta su $\mathbb{R}^2$.

ii) Per tale φ calcolare un potenziale $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ di ω.

iii) Calcolare l'integrale $I = \int_\gamma \omega$ lungo la curva γ di equazione polare $\varrho = \sin\vartheta$, $\vartheta \in [0, \pi/2]$.

Risposte: i) $\varphi =$; ii) $f =$; iii) $I =$

Esercizio 3 Al variare di $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{n+2}{n+1}\frac{x}{(1+2|x|)^n}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

i) Studiare la convergenza puntuale della serie.

ii) Stabilire se la convergenza è uniforme su ogni intervallo $[\delta, \infty)$ con $\delta > 0$.

iii) Stabilire se la convergenza è uniforme su qualche intervallo $[0, \delta]$ per un $\delta > 0$.

Risposte: i) CP: $x \in$; ii) CU su $[\delta, \infty)$: ; iii) CU su $[0, \delta]$:

Esercizio 4 Sia $\alpha > 0$ un parametro e consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|^\alpha}{x^4 + |y|^3} & \text{se } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = y = 0. \end{cases}$$

i) Determinare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia continua su tutto $\mathbb{R}^2$.

ii) Determinare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia differenziabile nel punto $0 \in \mathbb{R}^2$.

Risposte: i) $\alpha \in$; ii) $\alpha \in$

3 ore a disposizione

<u>Esercizio</u> Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che converga l'integrale improprio

$$\int_1^\infty \frac{t-1}{t^2 (\log t)^{\alpha+1}}\, dt.$$

Soluzione. Bisogna discutere la convergenza sia in $t=1$ che in $t=\infty$.

Convergenza dell'integrale:

$$(*) \qquad \int_1^2 \frac{t-1}{t^2(\log t)^{\alpha+1}}\, dt = \int_0^1 \frac{s\, ds}{(s+1)^2(\log(1+s))^{\alpha+1}}$$

Ricordiamo che $\log(1+s) = s + o(s) = s\,(1+o(1))$ per $s \to 0$. La funzione integranda si confronta con:

$$\frac{s}{(s+1)^2 [s(1+o(1))]^{\alpha+1}} = \frac{1}{s^\alpha (1+o(1))} \qquad s \to 0.$$

Siccome $\int_0^1 \frac{1}{s^\alpha}\, ds < \infty \Leftrightarrow \alpha < 1$, per il Criterio del Confronto Asintotico l'integrale $(*)$ converge se e solo se $\alpha < 1$.

Studiamo ora la convergenza dell'integrale

$$(**) \qquad \int_2^\infty \frac{t-1}{t^2(\log t)^{\alpha+1}}\, dt$$

La funzione $\frac{t-1}{t^2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} = \frac{1}{t}\left(1 - \frac{1}{t}\right)$

è asintotica con $\frac{1}{t}$ per $t \to \infty$. Per confronto Asintotico ci riconduciamo allo studio del seguente integrale:

$$\int_2^\infty \frac{(\log t)^{-\alpha-1}}{t}\,dt \quad (\alpha\neq 0) = \left[\frac{(\log t)^{-\alpha}}{-\alpha}\right]_{t=2}^{t=\infty} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha(\log 2)^{\alpha}} & \alpha>0 \\ +\infty & \alpha<0 \end{cases}$$

Quando $\alpha = 0$ si trova $+\infty$.

Quindi

$$\int_2^\infty \frac{t-1}{t^2(\log t)^{\alpha+1}}\,dt < \infty \iff \alpha > 0.$$

La conclusione generale è questa:

$$\int_1^\infty \frac{t-1}{t^2(\log t)^{\alpha+1}}\,dt < \infty \iff 0<\alpha<1.$$

$\square$

Esercizio Sia $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione tale che $\phi(0)=0$.
Si consideri la forma differenziale in $\mathbb{R}^2$

$$\omega = \big(1+y\cos(xy)\big)\,dx + \big(\phi(x)+x\cos(xy)\big)\,dy\,.$$

(i) Determinare ϕ in modo tale che ω sia esatta in $\mathbb{R}^2$.

(ii) Per tale ϕ calcolare un potenziale di ω.

(iii) Calcolare l'integrale $\int_\gamma \omega$ lungo la curva γ di equazione polare $\rho = \sin(\theta)$ con $\theta \in [0, \pi/2]$.

Soluzione (i) Siccome $\mathbb{R}^2$ è contraibile, ω è esatta in $\mathbb{R}^2$ se e solo se ω è chiusa in $\mathbb{R}^2$ (Teorema di Poincaré). Imponiamo

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(1+y\cos(xy)\big) = \frac{\partial}{\partial x}\big(\phi(x)+x\cos(xy)\big)$$

ovvero:

$$\cos(xy)+xy\big(-\sin(xy)\big) = \phi'(x)+\cos(xy)+xy\big(-\sin(xy)\big)$$

ovvero $\phi'(x)=0$ su $\mathbb{R}$ $\iff$ ϕ costante su $\mathbb{R}$

Siccome $\phi(0)=0$ deve essere $\phi(x)=0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

La forma è

$$\omega = \big(1+y\cos(xy)\big)\,dx + x\cos(xy)\,dy\,.$$

(ii) Cerchiamo $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tale che

$$\begin{cases} f_x = 1+y\cos(xy) \\ f_y = x\cos(xy) \end{cases} \quad \text{in } \mathbb{R}^2.$$

Integriamo la seconda equazione nella variabile y:

$$f(x,y) = \int x \cos(xy)\, dy = x \int \cos(xy)\, dy$$

$$= \sin(xy) + C(x)$$

dove $C(x)$ è indipendente da y.

Deriviamo in x e inseriamo nella prima equazione:

$$y \cos(xy) + C'(x) = 1 + y \cos(xy)$$

ovvero $C'(x) = 1$. Dunque $C(x) = x + C_0$

con $C_0 \in \mathbb{R}$ costante.

Il potenziale di ω è $f(x,y) = \sin(xy) + x + C_0$

con $C_0 \in \mathbb{R}$ costante. Possiamo scegliere $C_0 = 0$.

(iii) La curva $\gamma(\theta) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)$ verifica $\gamma(0) = (0,0)$

e $\gamma(\pi/2) = (0,1)$.

Siccome ω è esatta con potenziale f si ha:

$$\int_\gamma \omega = f(\gamma(\pi/2)) - f(\gamma(0))$$

$$= f(0,1) - f(0,0)$$

$$= 0 - 0 = 0.$$

$\square$

Esercizio Al variare di $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \frac{x}{(1+|x|)^n}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Studiare la convergenza puntuale.

(ii) Studiare la convergenza uniforme della serie.

Soluzione (i) Per $x=0$ la serie converge e la somma è 0. Proviamo che la serie converge assolutamente in ogni punto $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \frac{|x|}{(1+|x|)^n} < \infty.$$

Per il criterio della Radice:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{n+2} \frac{|x|}{(1+|x|)^n}} =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{n+2}}\right) \cdot \frac{1}{1+|x|} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x|}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \\ \dfrac{1}{1+|x|} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

Dunque $L<1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Quindi c'è convergenza assoluta (e quindi semplice) in ogni punto.

(ii) Studiamo la convergenza uniforme. É sufficiente studiare il caso $x \geq 0$. Consideriamo la funzione

$$\phi_n(x) = \frac{x}{(1+x)^n}, \quad x \geq 0.$$

La derivata è:

$$\phi_n'(x) = (1+x)^{-n} + x(-n)(1+x)^{-n-1}$$

$$= (1+x)^{-n-1}\left\{(1+x) - nx\right\}$$

Quindi $\phi_n'(x) \geq 0 \iff 1+x-nx \geq 0 \iff 1 \geq (n-1)x$

$$\iff x \leq \frac{1}{n-1} \qquad (\text{per } n \geq 2)$$

Di conseguenza $x = \frac{1}{n-1}$ è il p.to di max assoluto (per $n \geq 2$):

$$\phi_n(x) \leq \frac{1}{n-1} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} \qquad \forall x \geq 0, \ \forall n \geq 2$$

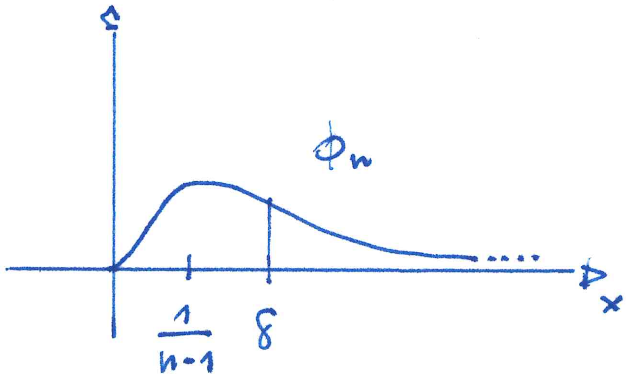
Tuttavia la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \frac{1}{n-1} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} = \infty$$

diverge perché il termine generale è asintotico con $\frac{1}{n}$, essendo $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n = e \neq 0$.

Il criterio di Weierstrass <u>non</u> si applica con successo su tutto $[0,\infty)$.

Fissiamo $\delta > 0$. Per tutti gli n grandi il grafico di ϕ_n è questo:



Quindi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \sup_{x \geq \delta} \frac{x}{(1+x)^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \frac{\delta}{(1+\delta)^n} < \infty .$$

Per il criterio di Weierstrass c'è convergenza uniforme su ogni intervallo $[\delta, \infty)$ con $\delta > 0$.

Proviamo che non c'è convergenza uniforme su $[0, \infty)$. Infatti

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \frac{x}{(1+x)^n} \geq \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x} \right)^n \overset{(x \neq 0)}{=}$$

$$= \frac{x}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{x+1}} = \frac{x}{2} \frac{x+1}{x+1-1} = \frac{x+1}{2}$$

e quindi $\lim_{x \to 0^+} f(x) \geq \frac{1}{2}$, mentre $f(0) = 0$.

Quindi la somma f <u>non</u> è continua in $x = 0$.

Quindi non può esserci convergenza uniforme su $[0, \delta]$, altrimenti la somma dovrebbe essere continua. $\square$

Esercizio Sia $\alpha > 0$ un parametro e consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,|y|^\alpha}{x^4 + |y|^3} & \text{se } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = y = 0. \end{cases}$$

(i) Determinare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia continua.

(ii) Determinare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia differenziabile nel punto $0 \in \mathbb{R}^2$.

Soluzione (i) Proviamo con il test delle rette. Sia $y = mx$ con $m \in \mathbb{R}$. Allora:

$$f(x,mx) = \frac{x\,|x|^\alpha |m|^\alpha}{x^4 + |x|^3 |m|^3} = \frac{x\,|x|^\alpha}{|x|^3} \quad \frac{|m|^\alpha}{|x| + |m|^3}$$

Vediamo che per $\alpha + 1 \leq 3 \iff \alpha \leq 2$ il limite

$$\lim_{x \to 0} f(x,mx)$$

o non esiste oppure non è zero. Dunque:

$$\alpha \leq 2 \implies f \text{ \underline{non} è continua in } 0 \in \mathbb{R}^2.$$

Consideriamo ora il caso $\alpha > 2$.

Stime:

$$\left| \frac{x\,|y|^\alpha}{x^4 + |y|^3} \right| = \frac{|x|\,|y|^\alpha}{x^4 + |y|^3} \leq \frac{(x^4 + |y|^3)^{\frac{1}{4}} (x^4 + |y|^3)^{\frac{\alpha}{3}}}{x^4 + |y|^3} =$$

$$= (x^4 + |y|^3)^{\frac{1}{4} + \frac{\alpha}{3} - 1}$$

Imponiamo

$$\frac{1}{4} + \frac{\alpha}{3} - 1 > 0 \iff \frac{\alpha}{3} > \frac{3}{4} \iff \alpha > \frac{9}{4}$$

Deduciamo che:

$$\alpha > \frac{9}{4} \implies f \text{ è continua in } 0 \in \mathbb{R}^2.$$

Rimane da esaminare il caso $2 < \alpha \leq 9/4$.

Consideriamo la curva $\gamma(t) = (t, t^{4/3})$.
Si ha (per $t>0$)

$$f(\gamma(t)) = \frac{t\, t^{\frac{4}{3}\alpha}}{t^4 + t^4} = \frac{1}{2}\, t^{1+\frac{4}{3}\alpha - 4}.$$

Imponiamo

$$1 + \frac{4}{3}\alpha - 4 \leq 0 \iff \frac{4}{3}\alpha \leq 3 \iff \alpha \leq \frac{9}{4}$$

Per questi α si ha

$$\lim_{t \to 0^+} f(\gamma(t)) \neq 0$$

e quindi f non è continua in $0 \in \mathbb{R}^2$.

Conclusione:

$$f \text{ cont. in } 0 \iff \alpha > \frac{9}{4}.$$

(ii) Le derivate parziali di f in $0 \in \mathbb{R}^2$ sono

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Quindi f è differenziabile in 0 se e solo se

$$(*) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,|y|^\alpha}{(x^4 + |y|^3)\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Lungo la curva $r(t) = (t, t^{4/3})$ si trova

$$\frac{t\, t^{\frac{4}{3}\alpha}}{(t^4+t^4)\sqrt{t^2+t^{8/3}}} = t^{1+\frac{4}{3}\alpha-4-1}\frac{1}{\sqrt{1+t^{2/3}}}$$

Deduciamo che per $\frac{4}{3}\alpha - 4 \leq 0 \iff \alpha \leq 3$ il limite in ⊛ non può essere zero. Dunque

$$\alpha \leq 3 \implies f \text{ \underline{non} è differenziabile in } 0.$$

Studiamo il caso $\alpha > 3$. Stime:

$$\left|\frac{x\,|y|^\alpha}{(x^4+|y|^3)\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|y|^\alpha}{(x^4+|y|^3)}\cdot\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{(x^4+|y|^3)^{\frac{\alpha}{3}}}{(x^4+|y|^3)}\cdot 1 :$$

$$= (x^4+|y|^3)^{\frac{\alpha}{3}-1}$$

Per confronto deduciamo che per $\frac{\alpha}{3} - 1 > 0$ si ha la validità del limite ⊛.

Conclusione:

$$f \text{ è differenziabile in } 0 \iff \alpha > 3.$$

□