Analisi Matematica 2 — Tema A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 6/7/2016

Esercizio 1 Sia $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva di equazione polare $\varrho = 1 + \sin\vartheta$, con $\vartheta \in [0, 2\pi]$.

i) Calcolare tutti i $\vartheta \in [0, 2\pi]$ tali che γ sia regolare in ϑ.

ii) Calcolare il campo unitario tangente T nei punti regolari..

iii) Disegnare approx. il supporto $\mathrm{spt}(\gamma) \subset \mathbb{R}^2$.

iv) Calcolare la lunghezza di γ.

Risposte: i) $\vartheta \in$; ii) $T =$; iii) Disegno: iv) $L(\gamma) =$

Esercizio 2 Si consideri l'insieme $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - y)^2 \leq x + y \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

i) Stabilire se K è chiuso.

ii) Stabire se K è compatto.

Risposte: i) K chiuso: ; ii) K compatto:

Esercizio 3 Al variare di $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n(x-2)^2}}{1 + n^2x^2}.$$

i) Studiare la convergenza puntuale della serie.

ii) Stabilire se la convergenza è uniforme su $(-\infty, 1]$.

iii) Stabilire se la convergenza è uniforme su $[1, \infty)$.

Risposte: i) CP: $x \in$; ii) CU su $(-\infty, 1]$: ; iii) CU su $[1, \infty)$:

Esercizio 4 Siano $\beta \in \mathbb{R}$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0\}$ ed $f : A \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \beta x^2 + y - \log(x + y).$$

i) Al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, calcolare i punti critici di f.

ii) Calcolare la matrice Hessiana di f.

iii) Determinare tutti i $\beta \in \mathbb{R}$ tali che f sia convessa su A.

iv) Stabilire se i punti critici sono punti di min/max, locale/globale.

Risposte: i) ; ii) $f_{xx} =$ $f_{yy} =$ $f_{xy} =$;   iii) $\beta \in$; iv)

3 ore a disposizione

Analisi Matematica 2 Tema B

Nome, cognome, matricola: Scritto del 6/7/2016

Esercizio 1 Sia $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva di equazione polare $\varrho = 1 - \sin\vartheta$, con $\vartheta \in [0, 2\pi]$.

i) Calcolare tutti i $\vartheta \in [0, 2\pi]$ tali che γ sia regolare in ϑ.

ii) Calcolare il campo unitario tangente T nei punti regolari.

iii) Disegnare approx. il supporto $\mathrm{spt}(\gamma) \subset \mathbb{R}^2$.

iv) Calcolare la lunghezza di γ.

Risposte: i) $\vartheta \in$; ii) $T =$; iii) Disegno: iv) $L(\gamma) =$

Esercizio 2 Si consideri l'insieme $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + y)^2 \leq x - y \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

i) Stabilire se K è chiuso.

ii) Stabire se K è compatto.

Risposte: i) K chiuso: ; ii) K compatto:

Esercizio 3 Al variare di $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx^2}}{1 + n^2(x + 2)^2}.$$

i) Studiare la convergenza puntuale della serie.

ii) Stabilire se la convergenza è uniforme su $(-\infty, -1]$.

iii) Stabilire se la convergenza è uniforme su $[-1, \infty)$.

Risposte: i) CP: $x \in$; ii) CU su $(-\infty, -1]$: ; iii) CU su $[-1, \infty)$:

Esercizio 4 Siano $\beta \in \mathbb{R}$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0\}$ ed $f : A \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = x + \beta y^2 - \log(x + y).$$

i) Al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, calcolare i punti critici di f.

ii) Calcolare la matrice Hessiana di f.

iii) Determinare tutti i $\beta \in \mathbb{R}$ tali che f sia convessa su A.

iv) Stabilire se i punti critici sono punti di min/max, locale/globale.

Risposte: i) ; ii) $f_{xx} =$ $f_{yy} =$ $f_{xy} =$; iii) $\beta \in$; iv)

3 ore a disposizione

Esercizio Sia $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva di equazione polare $\rho = 1 + \sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

i) Calcolare tutti i θ in cui γ è regolare. Calcolare il campo tangente unitario T.

ii) Calcolare i limiti destro e sinistro di T nei punti non regolare. (Non richiesto nel compito)

iii) Disegnare in modo approssimativo il sostegno di γ

iv) Calcolare la lunghezza di γ.

Risoluzione i) Sappiamo che $|\dot\gamma| = \sqrt{\rho^2 + \dot\rho^2}$, dove $\dot\rho = \cos\theta$.
Quindi γ non è regolare nel punto θ se e solo se

$$|\dot\gamma(\theta)| = 0 \iff \sqrt{(1+\sin\theta)^2 + \cos^2\theta} = 0$$

$$\iff \begin{cases} 1+\sin\theta = 0 \\ \cos\theta = 0 \end{cases} \iff \theta = \frac{3}{2}\pi .$$

In coordinate cartesiane si ha

$$\gamma(\theta) = \big((1+\sin\theta)\cos\theta,\ (1+\sin\theta)\sin\theta \big)$$
$$= \Big(\cos\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta),\ \sin\theta + \sin^2\theta \Big)$$

e quindi

$$\dot\gamma(\theta) = \big(-\sin\theta + \cos(2\theta),\ \cos\theta + \sin(2\theta) \big)$$

Come sopra : $|\dot\gamma(\theta)| = \sqrt{1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta} = \sqrt{2(1+\sin\theta)}$

Il campo tangente per $\theta \neq \frac{3}{2}\pi$ è

$$T = \frac{\left(-\sin\theta + \cos 2\theta,\ \cos\theta + \sin(2\theta)\right)}{\sqrt{2}\,\sqrt{1+\sin\theta}}$$

Cambiamo variabile : $\theta = \frac{3}{2}\pi + \phi$

$$\sin\theta = \sin\left(\tfrac{3}{2}\pi + \phi\right) = \sin\left(\tfrac{3}{2}\pi\right)\cos\phi + \cos\left(\tfrac{3}{2}\pi\right)\sin\phi$$

$$= -\cos\phi$$

$$\cos 2\theta = \cos(3\pi + 2\phi) = \cos(3\pi)\cos(2\phi) - \sin(3\pi)\sin(2\phi)$$

$$= -\cos(2\phi)$$

$$\cos\theta = \cos\left(\tfrac{3}{2}\pi + \phi\right) = \cos\left(\tfrac{3}{2}\pi\right)\cos\phi - \sin\left(\tfrac{3}{2}\pi\right)\sin\phi$$

$$= \sin\phi \qquad\qquad \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = -\sin(2\phi)$$

Dunque

$$T = \frac{\left(\cos\phi - \cos 2\phi,\ \sin\phi - \sin 2\phi\right)}{\sqrt{2}\,\sqrt{1-\cos\phi}}$$

Sviluppi:

$$\cos\phi - \cos 2\phi = 1 - \frac{\phi^2}{2} - \left(1 - \frac{1}{2}(2\phi)^2\right) + o(\phi^2)$$

$$= -\frac{\phi^2}{2} + 2\phi^2 + o(\phi^2)$$

$$= \frac{3}{2}\phi^2 + o(\phi^2)$$

$$\sin\phi - \sin 2\phi = \phi - \frac{1}{6}\phi^3 - \left(2\phi - \frac{1}{6}(2\phi)^3\right) + o(\phi^3)$$

$$= -\phi + o(\phi)$$

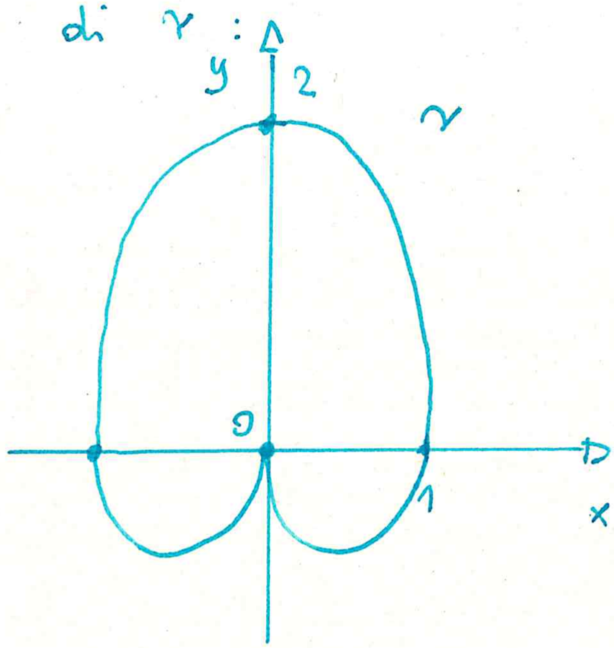
$$\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\phi} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}\phi^2 + o(\phi^2)} = |\phi| + o(\phi)$$

Dunque

$$\lim_{\theta \to \frac{3}{2}\pi^\pm} T = \lim_{\phi \to 0^\pm} \frac{\left(\frac{3}{2}\phi^2 + o(\phi^2), -\phi + o(\phi)\right)}{|\phi| + o(\phi)}$$

$$= (0, \mp 1)$$

iii) Supporto di γ :



iv) Lunghezza di γ : La lunghezza di γ è il doppio della lunghezza di γ nel semipiano $x \geq 0$.

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\dot{\gamma}| d\theta = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{2(1+\sin\theta)}\, d\theta =$$

$$= 2\sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1+\sin\theta} \cdot \frac{\sqrt{1-\sin\theta}}{\sqrt{1-\sin\theta}}\, d\theta$$

$$= 2\sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sqrt{1-\sin\theta}}\, d\theta$$

$$= 2\sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin\theta}}\, d\theta$$

$$= 2\sqrt{2} \left[-2\sqrt{1-\sin\theta} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 8 .$$

$\square$

__Esercizio__ Siano $\beta \in \mathbb{R}$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y>0\}$ ed $f : A \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = x + \beta y^2 - \log(x+y).$$

i) Al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, calcolare i punti critici di f.

ii) Calcolare la matrice Hessiana di f.

iii) Determinare tutti i $\beta \in \mathbb{R}$ tali che f sia convessa su A.

iv) Stabilire se i punti critici sono punti di min/max locale/globale.

Risoluzione i) Il gradiente di f è:

$$f_x = 1 - \frac{1}{x+y},$$

$$f_y = 2\beta y - \frac{1}{x+y}.$$

Quindi $(x,y) \in A$ è un p.to critico di f se e solo se

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x+y} = 0 \\ 2\beta y - \dfrac{1}{x+y} = 0. \end{cases}$$

Le due equazioni insieme implicano che $2\beta y = 1$. Se $\beta = 0$ l'equazione non ha soluzione e dunque non ci sono punti critici. Se $\beta \neq 0$ si trova

$$y = \frac{1}{2\beta}$$

che implica:

$$0 = 1 - \frac{1}{x + \frac{1}{2\beta}} \iff x + \frac{1}{2\beta} = 1 \iff x = 1 - \frac{1}{2\beta}.$$

Osserviamo che $x + y = \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right) + \frac{1}{2\beta} = 1 > 0$.

Quindi

$$\left(1 - \frac{1}{2\beta}, \frac{1}{2\beta}\right) \in A$$

è l'unico punto critico di f in A.

ii) Le derivate seconde di f sono:

$$f_{xx} = \frac{1}{(x+y)^2}, \quad f_{yy} = 2\beta + \frac{1}{(x+y)^2}$$

$$f_{xy} = \frac{1}{(x+y)^2}.$$

Dunque

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(x+y)^2} & \frac{1}{(x+y)^2} \\ \frac{1}{(x+y)^2} & 2\beta + \frac{1}{(x+y)^2} \end{bmatrix}$$

iii) La traccia e il determinante di Hf sono:

$$\det Hf = \frac{1}{(x+y)^2}\left(2\beta + \frac{1}{(x+y)^2}\right) - \frac{1}{(x+y)^4} = \frac{2\beta}{(x+y)^2}$$

$$\operatorname{tr} Hf = 2\beta + \frac{2}{(x+y)^2}.$$

Osserviamo che

$$\beta \geq 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \det Hf(x,y) \geq 0 \\ \mathrm{tr}\, Hf(x,y) \geq 0 \\ \forall (x,y) \in A \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} Hf(x,y) \geq 0 \\ \forall (x,y) \in A. \end{array}$$

Quindi $\beta \geq 0 \Rightarrow f$ convessa su A.

Studiamo il caso $\beta < 0$. In questo caso

$$\det Hf(x,y) < 0 \quad \forall (x,y) \in A.$$

Quindi gli autovalori di $Hf(x,y)$ hanno segno discorde. Dunque $Hf(x,y)$ non è né ≥ 0 né ≤ 0.

iv) Quando $\beta > 0$ f è convessa ed ha un unico punto critico $\left(1 - \frac{1}{2\beta}, \frac{1}{2\beta}\right)$. Questo è un punto di minimo globale.

Quando $\beta = 0$ non ci sono punti critici.

Quando $\beta < 0$ il punto critico non è né un min. né un max locale, in quanto Hf in quel punto non è definita (non è né ≥ 0 né ≤ 0). Il punto critico sarà un punto sella (ovvero gli autovalori di $Hf(x,y)$ sono di segno opposto).

$\square$

Esercizio Si consideri l'insieme $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+y)^2 \leq x-y \leq 1\}$.

i) Stabilire se K è chiuso.

ii) Stabilire se K è compatto.

Risoluzione. i) Abbiamo $K = K_1 \cap K_2$ dove

$$K_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+y)^2 - (x-y) \leq 0\}$$
$$= f_1^{-1}(]-\infty, 0]) \quad \text{con} \quad f_1(x,y) = (x+y)^2 - (x-y)$$

$$K_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-y) \leq 1\}$$
$$= f_2^{-1}(]-\infty, 1]) \quad \text{con} \quad f_2(x,y) = x-y.$$

Siccome $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sono continue segue che K_1 e K_2 sono chiusi (in quanto antimmagini di chiusi). Quindi $K = K_1 \cap K_2$ è chiuso essendo intersezione di chiusi.

ii) Proviamo che K è limitato. Se $(x,y) \in K$ allora:

$$(x+y)^2 \leq x-y \quad \text{e} \quad x-y \leq 1.$$

Deduciamo che $(x+y)^2 \leq 1$ ovvero $-1 \leq x+y \leq 1$. Incrociamo queste disuguaglianze con $0 \leq x-y \leq 1$, ovvero $y \leq x \leq 1+y$. Si trova:

$$-1 \leq x+y \leq 1+2y \implies y \geq -1$$

$$1 \geq x+y \geq 2y \implies y \leq \frac{1}{2}$$

Quindi $y \in [-1, 1/2]$. Ora dalla $y \leq x \leq 1+y$

deduciamo che $-1 \leq x \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Quindi $x \in [-1, \frac{3}{2}]$.

Conclusione:

$$K \subset [-1, \tfrac{3}{2}] \times [-1, \tfrac{1}{2}]$$

è limitato.

Per il Teorema di Heine - Borel K è compatto (essendo $K \subset \mathbb{R}^2$ chiuso e limitato).

$\square$

Esercizio Al variare di $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n(x-2)^2}}{1+n^2x^2}.$$

i) Studiare la convergenza puntuale;

ii) Stabilire se la convergenza è uniforme su $(-\infty, 1]$.

iii) Stabilire se la convergenza è uniforme su $[1, \infty)$.

Risoluzione. i) Serie a termini positivi. Quando $x = 2$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+4n^2} \leq \frac{1}{4}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) + 1 < \infty.$$

Quando $x \neq 2$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n(x-2)^2}}{1+n^2x^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left[e^{-(x-2)^2}\right]^n = \frac{1}{1-e^{-(x-2)^2}} < \infty$$

Quindi la serie converge in ogni punto $x \in \mathbb{R}$.

ii) Se $x \in (-\infty, 1]$ allora $|x-2|^2 \geq 1$ e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n(x-2)^2}}{1+n^2x^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} = \frac{1}{1-1/e} < \infty$$

Per il criterio di Weierstrass c'è convergenza uniforme su $(-\infty, 1]$.

iii) Se $x \in [1,\infty)$ allora si ha $1+n^2x^2 \geq 1+n^2$ e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n(x-2)^2}}{1+n^2x^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} < \infty .$$

Di nuovo, per il criterio di Weierstrass c'è convergenza uniforme su $[1,\infty)$.

In definitiva, c'è convergenza uniforme su tutto $\mathbb{R}$.

$\square$