Analisi Matematica 2 — Tema A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 12/9/2016

Esercizio 1 Si consideri l'integrale improprio

$$I_\gamma = \int_0^\infty \frac{\sin(x^2)}{x^\gamma \arctan(x)} dx.$$

Calcolare tutti i numeri reali $\gamma > -1$ tali che l'integrale converga semplicemente.

Risposte: $\gamma \in$

Esercizio 2 Dato $\alpha > 0$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|^\alpha}{\log(1+x^2+y^2)} & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0 & x = y = 0. \end{cases}$$

i) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia continua in $(0,0)$.

ii) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia differenziabile in $(0,0)$.

Risposte: i) $\alpha \in$; ii) $\alpha \in$

Esercizio 3 Si consideri il sottoinsieme del piano

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1 \text{ e } y^2 \leq \frac{5}{4+x^4}\right\}.$$

i) Stabilire se C è un insieme chiuso.

ii) Stabilire se C è un insieme compatto.

iii) Disegnare C.

Risposte: i) C chiuso: ; ii) C compatto: ; iii) Disegno:

Esercizio 4 Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \sqrt[n]{4^n + x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Calcolare il limite puntuale $f_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) Studiare la convergenza uniforme della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Risposte: i) $f_\infty =$; ii) CU per $x \in$

3 ore a disposizione

Analisi Matematica 2 **Tema B**

Nome, cognome, matricola: Scritto del 12/9/2016

Esercizio 1 Si consideri l'integrale improprio

$$I_\gamma = \int_0^\infty \frac{\sin(x^2)}{x^\gamma \log(1+x)}\,dx.$$

Calcolare tutti i numeri reali $\gamma \geq -1$ tali che l'integrale converga semplicemente.

Risposte: $\gamma \in$

Esercizio 2 Dato $\alpha > 0$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y|x|^{2\alpha}}{\arctan(x^2+y^2)} & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0 & x = y = 0. \end{cases}$$

i) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia continua in $(0,0)$.

ii) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia differenziabile in $(0,0)$.

Risposte: i) $\alpha \in$; ii) $\alpha \in$

Esercizio 3 Si consideri il sottoinsieme del piano

$$C = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1 \text{ e } y^2 \leq \frac{5}{1+x^2}\Big\}.$$

i) Stabilire se C è un insieme chiuso.

ii) Stabilire se C è un insieme compatto.

iii) Disegnare C.

Risposte: i) C chiuso: ; ii) C compatto: ; iii) Disegno:

Esercizio 4 Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{1+x^{2n}}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Calcolare il limite puntuale $f_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) Studiare la convergenza uniforme della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Risposte: i) $f_\infty =$; ii) CU per $x \in$

3 ore a disposizione

__Esercizio__ Si consideri il sottoinsieme del piano

$$C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy \geq 1 \quad e \quad y^2 \leq \frac{5}{1+x^2} \right\}.$$

i) Stabilire se C è chiuso.

ii) stabilire se C è compatto.

Soluzione. Le due funzioni $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = xy \quad e \quad g(x,y) = y^2(1+x^2)$$

sono continue (polinomi). Dunque le antimmagini

$$C_1 = f^{-1}([1,\infty))$$

$$C_2 = g^{-1}((-\infty, 5])$$

sono insiemi chiusi di $\mathbb{R}^2$. Dunque

$$C = C_1 \cap C_2$$

è l'intersezione di due chiusi e quindi è chiuso.

ii) Per il Teorema di Heine-Borel C è compatto se e solo se è chiuso e limitato. Bisogna vedere se C è limitato.

Osserviamo che $xy \geq 1 > 0$ e quindi x e y sono concordi di segno e quindi C è contenuto nel 1° e nel 3° quadrante. Inoltre $(x,y) \in C$ se e solo se $(-x,-y) \in C$. Quindi C è

simmetrico rispetto all'origine. Esaminiamo la porzione di C nel 1° quadrante, dove $x>0$ e $y>0$.
Qui abbiamo

$$y \geq \frac{1}{x} = \varphi(x),$$

$$y \leq \sqrt{\frac{5}{1+x^2}} = \psi(x).$$

Se $\varphi(x) \leq \psi(x)$ allora esistono delle y che verificano le due disuguaglianze. Studiamo:

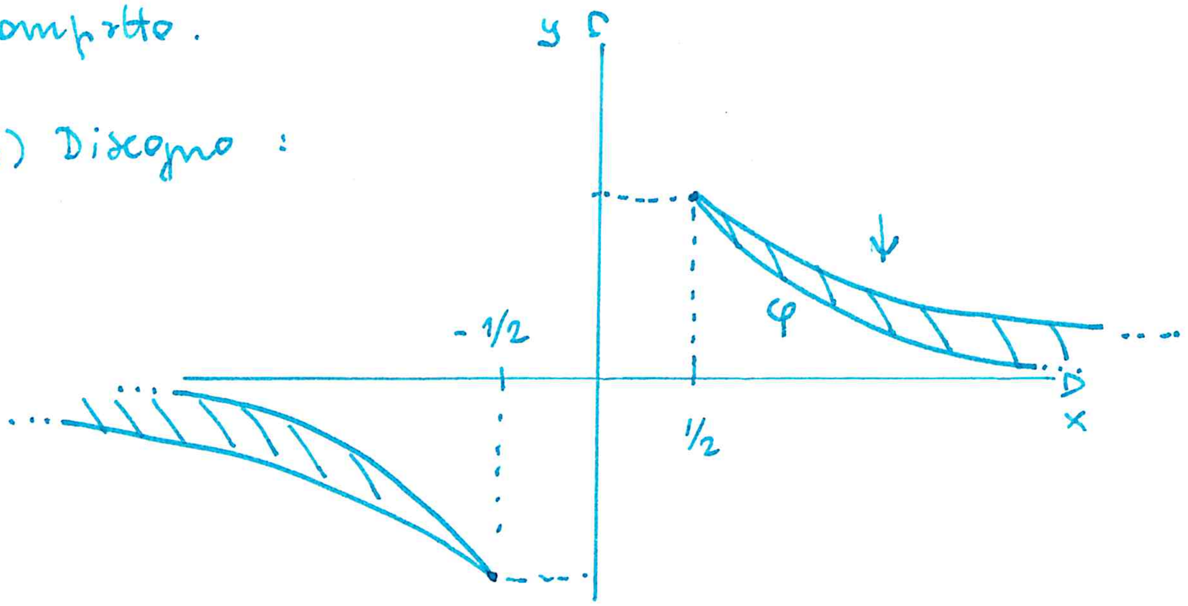
$$\varphi(x) \leq \psi(x) \iff \frac{1}{x} \leq \sqrt{\frac{5}{1+x^2}} \overset{x>0}{\iff} \frac{1}{x^2} \leq \frac{5}{1+x^2}$$

$$\iff 1+x^2 \leq 5x^2 \iff 1 \leq 4x^2$$

$$\iff x \geq \frac{1}{2}.$$

Dunque: $\forall x \geq \frac{1}{2}\ \exists y>0$ tale che $(x,y) \in C$.
Dunque C non è limitato e quindi non è compatto.

iii) Disegno:



Esercizio. Sia $\gamma \geq -1$ un numero reale e si consideri l'integrale improprio

$$I_\gamma = \int_0^\infty \frac{\sin(x^2)}{x^\gamma \log(1+x)}\, dx .$$

Calcolare tutti i $\gamma \geq -1$ tali che l'integrale I_γ converga.

Soluzione. Devono convergere entrambi gli integrali:

$$I_\gamma^{(1)} = \int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^\gamma \log(1+x)}\, dx \quad e \quad I_\gamma^{(2)} = \int_1^\infty \frac{\sin(x^2)\, dx}{x^\gamma \log(1+x)}$$

Studio $I_\gamma^{(1)}$ con il Criterio del Confronto Asintotico:

$$\begin{aligned} \sin(x^2) &= x^2 (1+o(1)) \\ \log(1+x) &= x(1+o(1)) \end{aligned} \quad \text{per } x \to 0 .$$

Quindi

$$\begin{aligned} I_\gamma^{(1)} < \infty \iff & \int_0^1 \frac{x^2}{x^\gamma \cdot x}\, dx < \infty \\ \iff & \int_0^1 \frac{1}{x^{\gamma-1}}\, dx < \infty \\ \iff & \gamma - 1 < 1 \iff \gamma < 2 . \end{aligned}$$

Voglio studiare $I_\gamma^{(2)}$ con il criterio di Abel-Dirichlet. Tuttavia $\sin(x^2)$ non ha primitiva limitata (non chiaro). Facciamo il cambio di variabile $x^2 = t \iff x = \sqrt{t}$ e $dx = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}}\, dt$.

Quindi:

$$I_\gamma^{(2)} = \int_1^\infty \frac{\sin(t)}{t^{\gamma/2}\log(1+t^{1/2})} \, \frac{1}{2} \, \frac{dt}{t^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\sin(t)}{t^{\frac{1}{2}(\gamma+1)}\log(1+t^{1/2})} \, dt$$

Precisamente per $\gamma \geq -1$ la funzione

$$f(t) = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}(\gamma+1)}\log(1+t^{1/2})}$$

è infinitesima per $t \to \infty$ e decrescente.

Quindi: $\gamma \geq -1 \Rightarrow I_\gamma^2$ converge.

Conclusione: I_γ converge se e solo se $-1 \leq \gamma < 2$.

$\square$

Esercizio Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, la successione di funzioni

$$f_n(x) = \sqrt[n]{4^n + x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Calcolare il limite puntuale $f_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) Studiare la convergenza uniforme della successione.

Soluzione i) Se $4 \le x^2$ si trova:

$$x^2 = \sqrt[n]{x^{2n}} \underset{\text{sempre}}{\le} \sqrt[n]{4^n + x^{2n}} \le \sqrt[n]{x^{2n} + x^{2n}} = \sqrt[n]{2 \cdot x^{2n}} = \underbrace{x^2 \cdot \sqrt[n]{2}}_{\xrightarrow{n\to\infty} x^2}$$

Per confronto:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n + x^{2n}} = x^2 \text{ se } x^2 \ge 4.$$

Se invece si ha $x^2 \le 4$ si trova:

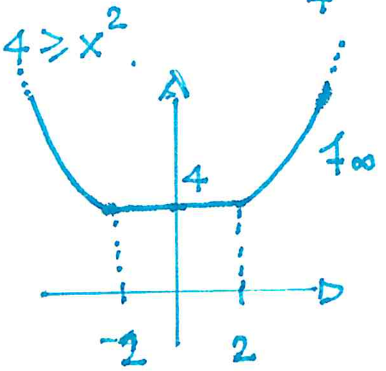
$$4 = \sqrt[n]{4^n} \le \sqrt[n]{4^n + x^{2n}} \le \sqrt[n]{4^n + 4^n} = \sqrt[n]{2 \cdot 4^n} = \underbrace{4 \cdot \sqrt[n]{2}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 4}$$

Per confronto:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n + x^{2n}} = 4 \text{ se } 4 \ge x^2.$$

Conclusione

$$f_\infty(x) = \max\{4, x^2\}$$



ii) Studio la convergenza uniforme per $x^2 \le 4$ ovvero per $x \in [-2,2]$:

$$0 \le f_n(x) - f_\infty(x) = \sqrt[n]{4^n + x^{2n}} - 4 \le \sqrt[n]{2 \cdot 4^n} - 4 =$$

$$= \underbrace{4(\sqrt[n]{2} - 1)}_{\substack{\downarrow n \to \infty \\ 0}}$$

Quindi si ha convergenza uniforme su $[-2,2]$.

Studio la convergenza uniforme per $x^2 \ge 4$:

$$0 \le g_n(x) = f_n(x) - f_\infty(x) = \underbrace{\sqrt[n]{4^n + x^{2n}} - x^2}_{\substack{\vee| \\ 0}}$$

Studio la funzione g_n.

Derivata :

$$g_n'(x) = \frac{d}{dx}\left((4^n + x^{2n})^{\frac{1}{n}} - x^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{n} (4^n + x^{2n})^{\frac{1}{n} - 1} \cdot 2n x^{2n-1} - 2x$$

$$= 2x \left[(4^n + x^{2n})^{\frac{1}{n} - 1} x^{2(n-1)} - 1 \right].$$

Studio il segno. Per simmetria pari di g_n mi limito al caso $x \ge 0$ (ovvero $x \ge 2$).

In questo caso:

$$g_n'(x) \geq 0 \iff (4^n + x^{2n})^{\frac{1}{n}-1} x^{2(n-1)} \geq 1$$

$$\iff x^{2(n-1)} \geq (4^n + x^{2n})^{1-\frac{1}{n}}$$

$$\underset{(n>1)}{\iff} x^2 \geq (4^n + x^{2n})^{\frac{1}{n}}$$

$$\iff x^{2n} \geq 4^n + x^{2n} \qquad \underline{\text{MAI}}$$

Quindi $g_n'(x) \leq 0$ per $x \geq 2$ e inoltre $g_n(x) \geq 0$.

Quindi

$$\max_{x \geq 2} g_n(x) = g_n(2) = \sqrt[n]{2 \cdot 4^n} - 4 = 4(\sqrt[n]{2} - 1) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

e c'è convergenza uniforme per $x^2 \geq 4$.

Conclusione $f_n \underset{n \to \infty}{\rightrightarrows} f_\infty$ su tutto $\mathbb{R}$. $\square$

<u>Esercizio</u> Dato $\alpha>0$ si consideri $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,|y|^\alpha}{\log(1+x^2+y^2)} & \text{se } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{se } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

i) Calcolare tutti gli $\alpha>0$ tali che f sia continua in $(0,0)$.

ii) Calcolare tutti gli $\alpha>0$ tali che f sia differenziabile in $(0,0)$.

Soluzione. i) Stime:

$$|f(x,y)| = \frac{|x|\,|y|^\alpha}{\log(1+x^2+y^2)} \le \frac{(x^2+y^2)^{1/2}\,(x^2+y^2)^{\alpha/2}}{\log(1+x^2+y^2)} =$$

$$= \frac{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\log(1+x^2+y^2)} = \frac{r^{\alpha+1}}{\log(1+r^2)} \quad \text{dove } r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Siccome $\log(1+r^2) = r^2(1+o(1))$ per $r\to 0^+$, si trova:

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{r^{\alpha+1}}{\log(1+r^2)} = \lim_{r\to 0^+} r^{\alpha-1} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha>1 \\ 1 & \text{se } \alpha=1 \\ \infty & \text{se } \alpha<1 \end{cases}$$

Deduciamo che

$$\alpha>1 \implies f \text{ continua in } (0,0).$$

Esaminiamo il caso $\alpha\le 1$. Test delle rette $y=mx$:

$$f(x, mx) = \frac{x\,|m|^\alpha |x|^\alpha}{\log(1+x^2+m^2x^2)} = \left[\begin{array}{c} o(1) \to 0 \\ \text{per } x \to 0 \end{array}\right]$$

$$= \frac{x\,|x|^\alpha |m|^\alpha}{x^2(1+m^2)(1+o(1))} = \frac{|m|^\alpha}{1+m^2} \frac{|x|^\alpha}{x\,(1+o(1))}$$

Per $\alpha \leq 1$ il limite $\lim_{x\to 0} f(x, mx)$ non esiste finito oppure dipende da m (quando $\alpha = 1$ e $x \to 0^+$)

Questo prova che:

$$\alpha \leq 1 \implies f \text{ non è continua in } (0,0).$$

ii) Siccome $f = 0$ sui due assi, le derivate parziali in $(0,0)$ esistono e sono

$$f_x(0,0) = 0 \quad e \quad f_y(0,0) = 0.$$

Dunque, f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se:

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y \to 0}} \frac{x\,|y|^\alpha}{\log(1+x^2+y^2)\cdot\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Procedendo come sopra:

$$\left| \frac{x\,|y|^\alpha}{\log(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha+1}{2}-\frac{1}{2}}}{\log(1+x^2+y^2)} = \frac{r^\alpha}{\log(1+r^2)}$$

dove $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

Ora si ha:

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{r^\alpha}{\log(1+r^2)} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^{\alpha-2}}{1+o(1)} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 2 \\ 1 & \text{se } \alpha = 2 \\ \infty & \text{se } \alpha < 2 \end{cases}$$

Questo prova che

$$\alpha > 2 \implies f \text{ differenziabile in } (0,0).$$

Quando $\alpha \leq 2$ con il test delle rette $y = mx$ si vede che il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,|y|^\alpha}{\log(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

non esiste finito. Dunque:

$$\alpha \leq 2 \implies f \text{ non è differenziabile in } (0,0).$$