Analisi Matematica 2

Nome, cognome, matricola: Scritto del 26/1/2017

Esercizio 1 Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{x+y} + x^4 + y^4, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Provare che f ha un unico punto critico e che si tratta di un punto di minimo assoluto.

Risposte: Collocazione approx. del punto di minimo:

Esercizio 2 Si consideri la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \big(\cos t, t \sin t\big), \quad t \in [0, 2\pi].$$

i) Calcolare il versore tangente $T(t)$ nei punti regolari t.

ii) Calcolare il limite $\bar{T}(0) = \lim_{t\to 0^+} T(t)$.

iii) Stabilire in quale quandrante si trovano i punti di massima e minima ordinata sul supporto della curva.

iv) Disegnare il supporto della curva (con cura intorno al punto $(1,0) \in \mathrm{spt}(\gamma)$).

Risposte: i) $T(t) =$; ii) $\bar{T}(0) =$ iii) Quad. max.: Quad. min.:   iv) Disegno:

Esercizio 3 Per $\alpha \geq 0$ si consideri l'integrale improrprio

$$I_\alpha = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx.$$

i) Calcolare tutti gli $\alpha \geq 0$ tali che l'integrale improprio converga semplicemente.

ii) Calcolare tutti gli $\alpha \geq 0$ tali che l'integrale improprio converga assolutamente.

Risposte: i) Convergenza semplice: $\alpha \in$; ii) Convergenza assoluta: $\alpha \in$

Esercizio 4 Per $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x}{x^2 n^2 + \log^4 n}.$$

i) Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie converge semplicemente.

ii) Studiare la convergenza uniforme della serie.

Risposte: i) Conv. sempl. per $x \in$; ii) Conv. uniforme per $x \in$

3 ore a disposizione

ESERCIZIO Si consideri la funzione $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = e^{x+y} + x^4 + y^4.$$

Provare che f ha un unico punto critico e che si tratta di un punto di minimo assoluto.

Soluzione. É $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Gradiente:

$$\nabla f(x,y) = \left(e^{x+y} + 4x^3 , e^{x+y} + 4y^3 \right)$$

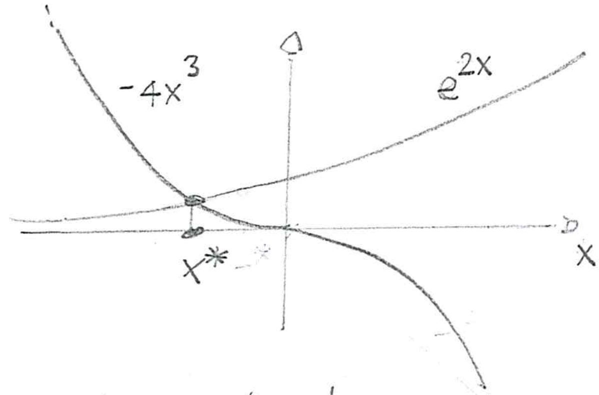
Dunque

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} e^{x+y} + 4x^3 = 0 \\ e^{x+y} + 4y^3 = 0 \end{cases}$$

Sottraendo le due equazioni si trova $x^3 = y^3 \iff x = y$.
Sostituendolo in una delle due si trova

$$e^{2x} + 4x^3 = 0 \iff e^{2x} = -4x^3$$

L'equazione $e^{2x} = -4x^3$ ha una soluzione unica $x^* < 0$



Quindi (x^*, x^*) è l'unico punto critico.

La matrice Hessiana di f è

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} + 8x^2 & e^{x+y} \\ e^{x+y} & e^{x+y} + 8y^2 \end{pmatrix}$$

Traccia:

$$tr(Hf(x,y)) = 8(x^2+y^2)+2\, e^{x+y} > 0$$

Determinante:

$$\det(Hf(x,y)) = (e^{x+y}+8x^2)(e^{x+y}+8y^2) - (e^{x+y})^2 =$$

$$= e^{x+y}\, 8\,(x^2+y^2) + 64x^2y^2 \geq 0$$

Quindi $Hf(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, ovvero f è convessa.

Quindi il punto critico (unico) è l'unico punto di minimo assoluto.

$\square$

Esercizio Si consideri la curva $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = (\cos t, t \sin t), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

1) Nei punti regolari calcolare il versore tangente

$$T(t) = \frac{\dot\gamma(t)}{|\dot\gamma(t)|}, \qquad t \in (0, 2\pi].$$

2) Calcolare il limite $\lim\limits_{t \to 0^+} T(t)$,

3) Stabilire in quale quadrante si trova il punto di massima (risp. minima) ordinata sul supporto della curva.

4) Disegnare il supporto della curva, con cura in $(1,0)$.

Soluzione. 1) La derivata di γ è:

$$\dot\gamma(t) = (-\sin t, \sin t + t \cos t)$$

e si ha $\dot\gamma(t) = (0,0) \iff t = 0$ unico punto non regolare. Inoltre

$$|\dot\gamma(t)| = \left((\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)\right)^{1/2}$$

$$= \left(2\sin^2 t + 2t \sin t \cos t + t^2 \cos^2 t\right)^{1/2}$$

e quindi

$$\frac{\dot\gamma(t)}{|\dot\gamma(t)|} = \frac{(-\sin t, \sin t + t\cos t)}{\left(2\sin^2 t + 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t\right)^{1/2}}.$$

2) Calcoliamo

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\dot\gamma(t)}{|\dot\gamma(t)|} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\dot\gamma(t)}{t} \cdot \frac{t}{|\dot\gamma(t)|}$$

dove

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\dot\gamma(t)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \left(-\frac{\sin t}{t} , \frac{\sin t}{t} + \cos t \right)$$

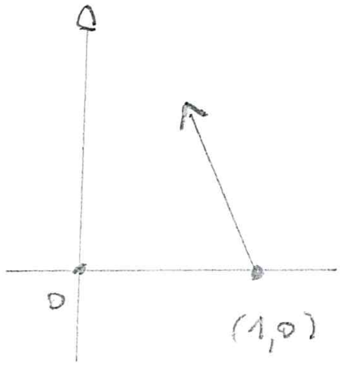
$$= (-1, 2)$$

e analogamente

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{|\dot\gamma(t)|}{t} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5} .$$

Quindi

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\dot\gamma(t)}{|\dot\gamma(t)|} = \frac{(-1,2)}{\sqrt{5}}$$



3) Osserviamo che $\cos t$ decresce per $t\in[0,\pi]$ e cresce per $t\in[\pi,2\pi]$. La derivata di $\phi(t) = t\sin t$ è $\phi'(t) = \sin t + t\cos t$. Studiamo il segno

$$\phi'(t) \geq 0 \iff \sin t + t\cos t \geq 0 \iff \sin t \geq -t\cos t$$

Dividiamo per $\cos t$, 1° CASO: $\cos t > 0$:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} \geq -t \iff t \geq -\operatorname{tg} t$$

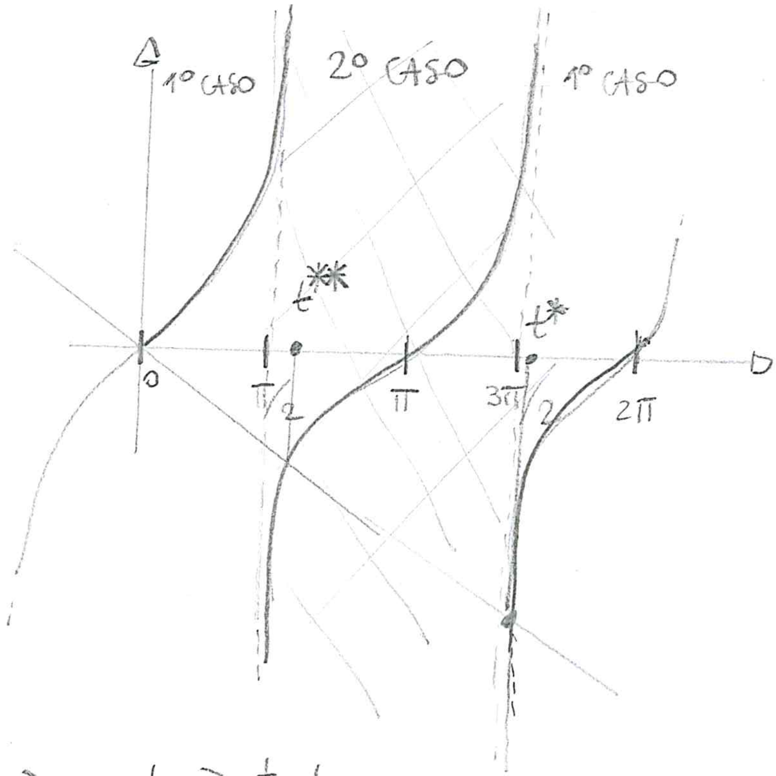
$$\iff -t \leq \operatorname{tg} t$$

ϕ cresce in $[0, \pi/2]$

ϕ cresce in $[t^*, 2\pi]$

dove $t^* \in (\frac{3}{2}\pi, \pi)$

4° Quadrante



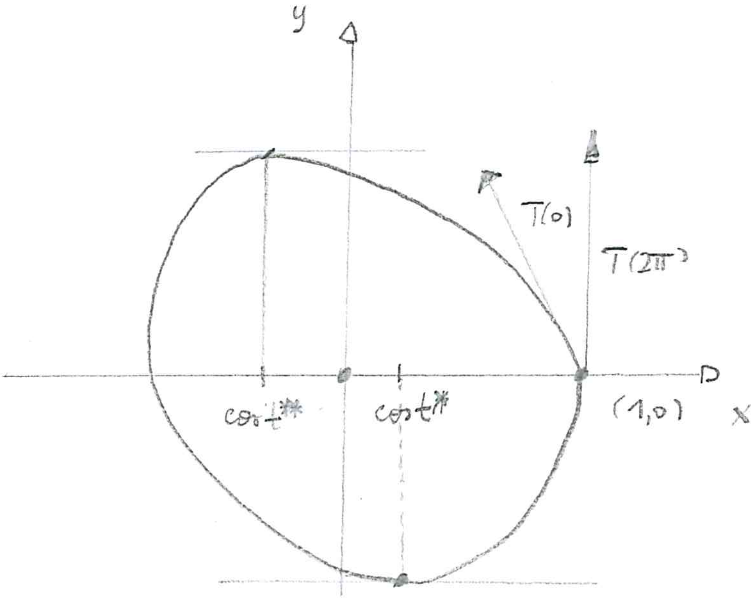
2° CASO: $\cos t < 0$

$$tg\, t = \frac{\sin t}{\cos t} \leq -t \iff -t \geq tg\, t$$

ϕ cresce in $[\frac{\pi}{2}, t^{**}]$ per $t^{**} \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 2° Quadrante

ϕ decresce in $[t^{**}, \frac{3}{2}\pi]$

4) Consideriamo $T(2\pi) = (0, 1)$



<u>ESERCIZIO</u> Per $\alpha \geq 0$ si consideri l'integrale improprio

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$$

1) Calcolare tutti gli $\alpha \geq 0$ tali che l'integrale converga semplicemente.

2) Calcolare tutti gli $\alpha \geq 0$ tali che l'integrale converga assolutamente.

Soluzione. Spezziamo

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx = \int_0^1 \cdots dx + \int_1^\infty \cdots dx ,$$

1) $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$ converge per $\alpha > 0$ per il Criterio di Abel-Dirichlet. Per $\alpha = 0$ NON converge. Inoltre

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx \text{ converge } \overset{\sin x \underset{x\to 0}{=} x + o(x)}{\iff} \int_0^1 \frac{x}{x^\alpha}\, dx \text{ converge}$$

$$\iff \alpha - 1 < 1 \iff \alpha < 2$$

Risposta: $0 < \alpha < 2$.

2) Come sopra:

$$\int_0^1 \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx < \infty \iff \int_0^1 \left| \frac{x}{x^\alpha} \right| dx < \infty$$

$$\iff \alpha < 2$$

Studiamo l'integrale

$$I = \int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^{\alpha}}\, dx .$$

Per $\alpha > 1$:

$$I \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx < \infty$$

Per $\alpha = 1$:

$$I = \int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx = \infty \quad \text{visto in classe}$$

Per $0 < \alpha < 1$: $\quad x^{\alpha} \leq x \quad (\text{per } x \geq 1)$

$$I = \int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^{\alpha}}\, dx \geq \int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx = \infty$$

Quindi diverge.

Risposta : $1 < \alpha < 2$.

II

ESERCIZIO Per $x \geq 0$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x}{x^2 n^2 + \log^4 n} .$$

1) stabilire per quali $x \geq 0$ c'è convergenza semplice.

2) Studiare la convergenza uniforme.

3) C'è convergenza uniforme su $[0,\infty)$. Vero o Falso?

Soluzione 1) Per $x=0$ c'è convergenza e la somma è 0. Per $x>0$:

$$0 \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x}{x^2 n^2 + \log^4 n} \leq \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty .$$

Converge per confronto.

2) Come sopra, per $x \geq \delta > 0$ si trova

$$\sup_{x \geq \delta} \frac{x}{x^2 n^2 + \log^4 n} \leq \frac{1}{\delta} \frac{1}{n^2}$$

e quindi c'è convergenza uniforme su $[\delta,\infty)$ per ogni $\delta > 0$.

3) Osserviamo che $(2ab \leq a^2+b^2)$;

$$x^2 n^2 + \log^4 n \geq 2xn \log^2 n$$

e quindi

$$\frac{x}{x^2 n^2 + \log^4 n} \leq \frac{x}{2xn \log^2 n} = \frac{1}{2n \log^2 n}$$

La stima è vera $\forall x \geq 0$ e $\forall n \geq 2$.

La serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n} < \infty \quad \text{converge.}$$

Lo si vede con il criterio del confronto integrale

$$\int_2^{\infty} \frac{dt}{t \log^2 t} dt = \left[-\frac{1}{\log t} \right]_{t=2}^{t=\infty}$$

$$= \frac{1}{\log 2} < \infty$$

Conclusione: per il criterio di Weierstrass la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x}{x^2 n^2 + \log^4 n}$$

converge uniformemente su $[0, \infty)$.

$\square$