Esercizio Sia $p \geq 0$ un parametro. Per $x \geq 0$ si consideri la serie di funzioni

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^p x^{p+1} e^{-nx}, \qquad x \geq 0.$$

① Discutere la convergenza puntuale.

② Studiare la convergenza totale e uniforme

③ Provare che

$$f(x) \geq \int_1^{\infty} (t-1)^p x^{p+1} e^{-tx} dt, \qquad x \geq 0.$$

④ Provare che f non è continua in $x=0$.

Soluzione. ① Per $x=0$ la serie converge e $f(0)=0$. Per $x>0$ usiamo il criterio della radice:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p x^{p+1} e^{-nx}} = \lim_{n\to\infty} e^{-x} \sqrt[n]{n^p} \sqrt[n]{x^{p+1}}$$

$$= e^{-x} < 1$$

Quindi la serie converge.

② Studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sup_{x \geq 0} n^p x^{p+1} e^{-nx} \right)$$

Sia $f_n(x) = n^p x^{p+1} e^{-nx}$ per $x \geq 0$.

Derivata:

$$f_n'(x) = n^p e^{-nx} \left((p+1) x^p - x^{p+1} n \right)$$

$$= n^p x^p e^{-nx} \left((p+1) - xn \right)$$

Quindi f_n cresce su $\left[0, \frac{p+1}{n}\right]$ e decresce su $\left[\frac{p+1}{n}, \infty\right)$. L'estremo superiore è preso nel punto $x = \frac{p+1}{n}$, il punto unico di massimo assoluto.

Conti:

$$f_n\left(\frac{p+1}{n}\right) = n^p \left(\frac{p+1}{n}\right)^{p+1} e^{-(p+1)}$$

$$= (p+1)^{p+1} \frac{1}{n} e^{-(p+1)}$$

Siccome $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ non si ha convergenza totale su $[0,\infty)$. In particolare non si può usare il Criterio di Weierstrass.

Fissiamo $\delta > 0$ e studiamo la convergenza uniforme su $[\delta, \infty)$. Definitivamente in n avremo

$$\sup_{x \geq \delta} f_n(x) = f_n(\delta) \quad \text{con} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\delta) < \infty$$

Per il Criterio di Weierstrass c'è convergenza uniforme su $[\delta, \infty)$.

③ Se $t \in [n, n+1]$ avremo $(x \geq 0)$

$$n^p \geq (t-1)^p \quad e \quad e^{-nx} \geq e^{-tx}$$

Quindi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p x^{p+1} e^{-nx} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(n^p x^{p+1} e^{-nx}\right) dt \geq$$

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} (t-1)^p x^{p+1} e^{-tx}\, dt =$$

$t-1=s$

$$= \int_1^{\infty} (t-1)^p x^{p+1} e^{-tx}\, dt =$$

$$= \int_0^{\infty} s^p x^{p+1} e^{-(s+1)x}\, ds$$

$sx = r$

$$= x^{p+1} e^{-x} \int_0^{\infty} s^p e^{-sx}\, ds =$$

$$= x^{p+1} e^{-x} \int_0^{\infty} \frac{r^p}{x^p} e^{-r} \frac{1}{x}\, dr$$

$$= e^{-x} \int_0^{\infty} r^p e^{-r}\, dr$$

④ Avremo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \geq \lim_{x\to 0^+} e^{-x}\int_0^\infty r^p e^{-r}\,dr =$$

$$= \int_0^\infty r^p e^{-r}\,dr > 0.$$

Siccome $f(0)=0$, segue che f non è continua in $x=0$. In particolare la serie non può convergere uniformemente su nessun intervallo del tipo $[0,\delta]$ con $\delta>0$.