Esercizio 1 Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \neq 0\}$ e sia $\omega \in \Omega^1(A)$ la 1-forma differenziale

$$\omega = \frac{y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

(i) stabilire se ω è chiusa in A.

(ii) stabilire se ω è esatta in A.

Soluzione (i) ω è chiusa in A se

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)$$

Conti:

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2) - y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{-x}{x^2+y^2} = -\frac{(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Quindi ω è chiusa su A.

(ii) Sia $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

È una curva <u>chiusa</u> contenuta in A.

Calcoliamo l'integrale

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega(T)\, ds$$

dove $T = \frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|}$ con $\dot\gamma(t) = (-\sin t, \cos t)$

e quindi

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \omega\left(\dot\gamma(t)/|\dot\gamma(t)|\right) \, |\dot\gamma(t)|\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \omega(\dot\gamma(t))\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1^2+\gamma_2^2}\, \dot\gamma_1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_1^2+\gamma_2^2}\, \dot\gamma_2 \right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin t}{\cos^2 t+\sin^2 t} (-\sin t) - \frac{\cos t}{\cos^2 t+\sin^2 t} \cos t \right) dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} 1\, dt = -2\pi \neq 0 .$$

Siccome l'integrale di ω su una curva chiusa non è 0 deduciamo che ω non è esatta in A.

$\square$

Esercizio 2 Sia ω come nell'esercizio precedente e sia $B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \ x>0 \}$.
Provare che ω è esatta in B e calcolare un potenziale di ω in B.

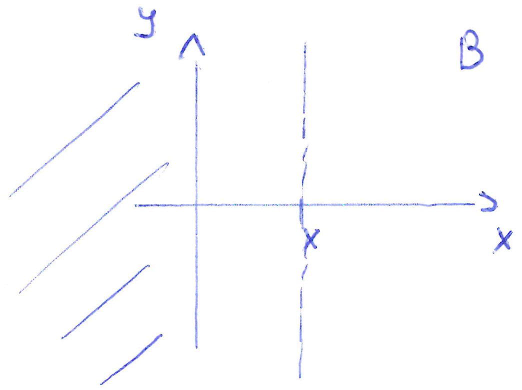
Soluzione. B è convesso ed ω è chiusa in B. Dunque per il Teorema di Poincaré è esatta in B.
Cerchiamo una funzione $f \in C^1(B)$ tale che

$$f_x = \frac{y}{x^2+y^2}$$

in B

$$f_y = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

Integriamo la ~~prima~~ seconda equazione in y con ~~y fiss~~ x fissato:



$$f(x,y) = \int \frac{-x}{x^2+y^2}\, dy$$

$$= -x \cdot \frac{1}{x^2} \int \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\, dy$$

$$= - \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + C(x)$$

dove $C(x)$ è una costante (in y) che però può dipendere da $x>0$.

Deriviamo questa formula per f nella x (con y fissato):

$$f_x(x,y) = -\frac{y\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + c'(x)$$

$$= \frac{y}{x^2+y^2} + c'(x)$$

Sostituiamo nella prima equazione:

$$\frac{y}{x^2+y^2} + c'(x) = \frac{y}{x^2+y^2} \qquad \begin{array}{l} x>0 \\ y\in\mathbb{R} \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

$$c'(x) = 0$$

e quindi c = costante indipendente sia da x che da y. Dunque un potenziale è dato dalla funzione

$$f(x,y) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + c$$

ben definita per $x>0$ ed $y\in\mathbb{R}$, cioè su B.

$\square$

Esercizio 3 Sia $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y > 0 \}$ e sia $\omega \in \Omega^1(A)$ la 1-forma differenziale

$$\omega = (2x+y) \log(x+y)\, dx + x(1+\log(x+y))\, dy .$$

(i) Provare che ω è chiusa in A.

(ii) Provare che ω è esatta in A.

(iii) Calcolare un potenziale di ω in A.

(iv) Sia $\gamma : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$ la curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. Calcolare l'integrale $\int_\gamma \omega$.

Soluzione (i) Conti:

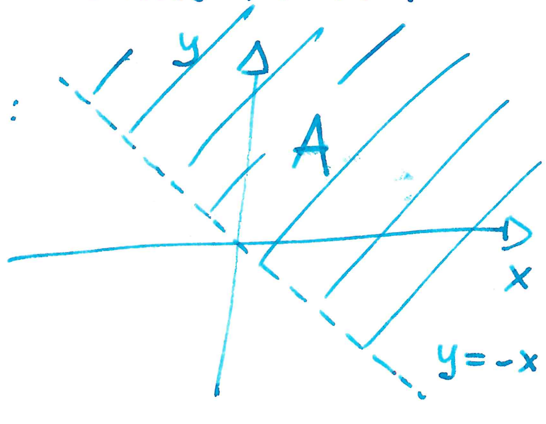
$$\frac{\partial}{\partial y} (2x+y)\log(x+y) = \log(x+y) + (2x+y)\frac{1}{x+y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} x(1+\log(x+y)) = 1 + \log(x+y) + \frac{x}{x+y}$$

$$= \log(x+y) + \frac{2x+y}{x+y}$$

Sono uguali e pertanto ω è chiusa in A.

(ii) L'insieme A è convesso: Infatti è un semipiano.



Siccome ω è chiusa in A per il Teorema di Poincaré ω è esatta in A.

(iii) Un potenziale $f: A \to \mathbb{R}$ deve verificare

$$f_x = (2x+y)\log(x+y) \cancel{+x(1+\log(x+y))}$$

$$f_y = x\left(1+\log(x+y)\right)$$

Integriamo la seconda equazione in y con x fissato:

$$f(x,y) = \int x\left(1+\log(x+y)\right)dy$$

$$= xy + x\int \log(x+y)\,dy$$

$$= xy + x\int\left[\frac{\partial}{\partial y}(x+y)\right]\log(x+y)\,dy$$

$$= xy + x\left\{(x+y)\log(x+y) - \int (x+y)\frac{1}{x+y}\,dy\right\}$$

$$= xy + x(x+y)\log(x+y) - xy + C(x)$$

$$= x(x+y)\log(x+y) + C(x)$$

Derivo in x

$$f_x = (2x+y)\log(x+y) + (x^2+xy)\frac{1}{x+y} + c'(x)$$

$$= (2x+y)\log(x+y) + x + c'(x)$$

Inserendo nella equazione per f_x nella pagina precedente si trova:

$$(2x+y)\log(x+y) + x + c'(x) = (2x+y)\log(x+y)$$

$$c'(x) = -x$$

$$c(x) = -\frac{x^2}{2} + c_0 \qquad c_0 \in \mathbb{R} \text{ costante}$$

Quindi un potenziale è:

$$f(x,y) = x(x+y)\log(x+y) - \frac{x^2}{2}.$$

(iv) Siccome ω è esatta si ha

$$\int_\gamma \omega = f(\gamma(\tfrac{\pi}{2})) - f(\gamma(0)) = f(0,1) - f(1,0)$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$