

Analisi Matematica 2

Foglio 1

Serie numeriche 1

11 Febbraio 2016

Esercizio 1. Studiare la convergenza delle serie numeriche

$$\text{i) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + e^n}{(n+1)!}; \quad \text{ii) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{3^n + 5^n}; \quad \text{iii) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n^2}.$$

Risposte: i) converge (Criterio del rapporto); ii) converge (Criterio della radice oppure confronto con la serie geometrica di ragione $4/5$); iii) converge (Criterio del rapporto).

Esercizio 2. Studiare la convergenza delle seguenti serie

$$\text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2 + 1}; \quad \text{ii) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \log(n+1)}; \quad \text{iii) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \log n}; \quad \text{iv) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \log n}.$$

Risposte: i) converge (Criterio del confronto, usare $\log n \leq \sqrt{n}$ per $n \geq \bar{n}$); ii) diverge (confronto); iii) converge (Leibniz).

Esercizio 3. Determinare tutti i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} (\sqrt{1+n^4} - n^2)$$

converga. Risposta: $\alpha > -1$ (Criterio del confronto).

Esercizio 4. Calcolare la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n}$. Risposta: $3/4$. (Cfr. serie telescopiche).

Esercizio 5. ★ Sia $0 < a < 1$ un numero reale e definiamo $a_n \in (-1, 0)$ tramite la relazione $\sqrt[n]{a} = 1 + a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

i) Assumendo come nota la disuguaglianza

$$|a_n| \leq \frac{1}{n} \left(\frac{1-a}{a} \right), \quad n \geq 1, \quad (*)$$

studiare la convergenza semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{a}}{\log^2 n + 1}.$$

ii) Provare la (*).