Analisi Matematica 2 — Foglio 10

Massimi, minimi, punti critici. — 20 Maggio 2016

Esercizio 1. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = x^3 - y^3 + 3\alpha xy.$$

Determinare i punti critici di f ed eventuali punti di minimo/massimo locale/globale.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$. Calcolare i punti critici di f e stabilire se sono punti di massimo/minimo locale.

Esercizio 3. Siano $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 2\pi\}$ ed $f : K \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \sin(2x)\cos(y).$$

i) Provare che f assume massimo e minimo su K;

ii) Calcolare i punti critici di f nell'interno di K e classificarli;

iv) Tracciare un grafico qualitativo di f;

v) Determinare l'insieme $f(K)$.

Esercizio 4. Sia $\alpha > 0$ un parametro fissato e consideriamo l'insieme

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq \frac{1}{\alpha^2 + y^2} \right\}.$$

Provare che la funzione $f(x, y) = 2xy$ assume massimo su A e calcolarlo.

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xyz$. Calcolare i punti critici di f e stabilire se sono punti di massimo/minimo locale.

Esercizio 6. Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto con interno non vuoto, $\mathrm{int}(K) \neq \emptyset$, e sia $f : K \to \mathbb{R}$ una funzione con queste proprietà: 1) f è continua su K; 2) f è differenziabile in $\mathrm{int}(K)$; 3) f è costante su ∂K. Dimostrare che esiste almeno un punto $x \in \mathrm{int}(K)$ tale che $\nabla f(x) = 0$.