

**Esercizio 1.** Calcolare l'integrale della 1-forma differenziale  $\omega$  lungo la curva  $\gamma$  assegnata:

- i)  $\omega = x^2 dx + xy dy$  in  $\mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = (t^2, t)$  con  $t \in [-1, 1]$ .
- ii)  $\omega = (x - z) dx + (1 - xy) dy + y dz$  in  $\mathbb{R}^3$ ,  $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$  con  $t \in [0, 1]$ .
- iii)  $\omega = 2x(x + y) dx + 2y(x + y) dy$  in  $\mathbb{R}^2$  lungo la curva  $\gamma$  con equazione polare  $\rho = k\vartheta$ , dove  $\vartheta \in [0, \pi/2]$  e  $k \geq 0$  è un parametro fissato (spirale di Archimede).

Risp. i) 0; ii) 29/20; iii)  $k^3(\pi^2 + 4\pi - 16)/2$ .

**Esercizio 2.** Stabilire se i seguenti insiemi sono contraibili (semplicemente connessi):

- i)  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \neq 0\}$  in  $\mathbb{R}^3$ ;
- ii)  $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \log(1 + |x|) \geq |x|/2\}$  in  $\mathbb{R}^n$  con  $n \geq 1$ ;
- iii)  $C = \{(x + y, xy) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$  in  $\mathbb{R}^2$ .

Risp. i) No; ii) Si; iii) Si.

**Esercizio 3.** Determinare tutti i valori del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$  tali che la 1-forma differenziale in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\omega = \frac{1}{(x^2 + y^2)^\alpha} \left( (x - y) dx + (x + y) dy \right)$$

sia chiusa. Per tali valori  $\omega$  è anche esatta su  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ?

Risp.  $\alpha = 1$ ; No.

**Esercizio 4.** Determinare tutti i valori di  $\alpha \in \mathbb{R}$  tali che la 1-forma differenziale in  $\mathbb{R}^3$

$$\omega = (\alpha y + z) dx + (\alpha x + z) dy + (\alpha x + y) dz$$

sia chiusa. Per tali valori calcolare un potenziale di  $\omega$  su  $\mathbb{R}^3$ .

Risp.  $\alpha = 1$ .

**Esercizio 5.** Si consideri la 1-forma differenziale nel piano

$$\omega = \left( \log(x + y) + \frac{x}{x + y} \right) dx + \frac{x}{x + y} dy.$$

- i) Determinare il più grande insieme aperto  $A \subset \mathbb{R}^2$  su cui  $\omega$  è ben definita.
- ii) Stabilire se  $\omega$  è chiusa in  $A$ .

iii) Stabilire se  $\omega$  è esatta in  $A$  ed eventualmente calcolarne un potenziale.

Risp.  $f(x, y) = x \log(x + y)$ .

**Esercizio 6.** Sia  $\omega$  la 1-forma differenziale in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\omega = \frac{1 - \sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x dx + y dy).$$

Calcolare l'integrale di  $\omega$  lungo la curva  $\gamma$  di equazione polare  $\rho = e^\vartheta$  con  $\vartheta \in [0, \pi/2]$  (spirale logaritmica). Determinare preliminarmente un potenziale della forma.

Risp. iii)  $e^{\pi/2} + \cos(e^{\pi/2}) - 1 - \cos 1$ .

**Esercizio 7.** Si consideri la forma differenziale su  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$\omega = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}((x^2 - y^2)dx - 2xydy).$$

Stabilire se  $\omega$  è chiusa oppure esatta, ed eventualmente calcolarne un potenziale.