

# Analisi Matematica 2

Foglio 5

Spazi metrici e limiti in più variabili

14 Aprile 2016

---

**Esercizio 1.** Quali tra le seguenti funzioni  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  sono distanze su  $\mathbb{R}$ ?

ii)  $d(x, y) = |x - y| + |x^3 - y^3|$ .

iii)  $d(x, y) = x^2 + y^2 + xy$ .

iv)  $d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$ .

**Esercizio 2.** Determinare il più grande sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  su cui è definita ciascuna delle seguenti funzioni:

i)  $f(x, y) = \sqrt{xy + \log x}$ ; ii)  $g(x, y) = \sqrt{xe^y - ye^x}$ ; iii)  $h(x, y) = \sqrt{xy(xy - 1)}$ .

**Esercizio 3.** Stabilire se esistono ed eventualmente calcolare i seguenti limiti:

$$\text{i) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^4)}{x^2 + y^2}; \quad \text{ii) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^4 + y^4)}{x^2 + y^2}.$$

**Esercizio 4.** Stabilire se la funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin y - y \sin x}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

è continua nel punto  $(0, 0)$ .

**Esercizio 5.** Determinare tutti i valori del parametro  $\alpha > 0$  tali che la funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y|x|^\alpha}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

sia continua nel punto  $(0, 0)$ .

**Esercizio 6.** ★ Sia  $\alpha \in (0, 1]$  e definiamo la funzione  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$

$$d(x, y) = |x - y|^\alpha, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

dove  $|\cdot|$  è la norma standard di  $\mathbb{R}^n$ . Provare che  $(\mathbb{R}^n, d)$  è uno spazio metrico.