

Esercizio 1. Detto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$, sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ la funzione

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^{xy} + y \log x \\ y^{xy} - x \log y \end{pmatrix}.$$

Calcolare la matrice Jacobiana di f in un generico punto del dominio. È vero che

$$\det Jf(x, x) \neq 0 \quad \text{per ogni } x > 0?$$

Esercizio 2. Calcolare il piano tangente in un generico punto della superficie 2-dimensionale $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + xy - z^2 + 1 = 0\}$. Tracciare un disegno approssimativo di M .

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^6}{x^6 + y^8} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1) Provare che f è continua su \mathbb{R}^2 . 2) Stabilire se f è differenziabile in $(0, 0)$.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$, la funzione

$$f(x) = \frac{1}{|x|}, \quad |x| \neq 0,$$

dove $|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$. Calcolare in un generico punto $x \neq 0$ la derivata direzionale di f lungo la direzione $v = \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}$.

Esercizio 5. Siano $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni tali che $f(0) = g(0) = 0$ e, per $x^2 + y^2 \neq 0$,

$$f(x, y) = \frac{y|x|^\alpha}{x^4 + y^2}, \quad g(x, y) = y \sin\left(\frac{|x|^\beta}{x^2 + y^4}\right),$$

dove $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ sono parametri.

- 1) Calcolare tutti gli α tali che f sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.
- 2) Calcolare tutti i β tali che g sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.
- 3) Calcolare tutti i $\gamma > 0$ tali che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin\left(\frac{|x|^\gamma}{x^4 + y^2}\right) = 0.$$

Esercizio analogo risolto negli appunti on line.