Lezione 14

venerdì 15 aprile 2016 08:31

ES 1

$$f_n(x) = \frac{n^2 \sin\left(\frac{x}{n^2}\right)}{1+n^2x^2}$$

$x \in \mathbb{R}$

$n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

2) Provare $\left|f_n(x)\right| \leq \frac{|x|}{1+x^2n^2}$.

Facile: Uso

$$\left|\sin(t)\right| \leq |t| \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

e quindi

$$\left|f_n(x)\right| = \frac{n^2}{1+n^2x^2}\left|\sin\left(\frac{x}{n^2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{n^2}{1+n^2x^2}\left|\frac{x}{n^2}\right| =$$

$$= \frac{|x|}{1+n^2x^2}.$$

③ Studiare la conv. uniforme

Vorrei vedere se

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f_n(x) - 0 \right| \overset{?}{=} 0$$

ovvero

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{n^2 \sin\left(\frac{x}{n^2}\right)}{1 + n^2 x^2} \right| \overset{?}{=} 0$$

Per il punto 2) Basta provare che

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|x|}{1 + n^2 x^2} \overset{?}{=} 0$$

Limito lo studio a $x \geq 0$

$$g_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2} \qquad x \geq 0$$

Derivata

$$g_n'(x) = \frac{(1 + n^2 x^2) - x \, 2n^2 x}{(1 + n^2 x^2)^2}$$

$$= \frac{1 - n^2 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2}$$

$$g_n'(x) \geq 0 \iff 1 - n^2 x^2 \geq 0$$

$$\iff \quad n^2 x^2 \leq 1$$

$$\iff \quad x^2 \leq \frac{1}{n^2}$$

$$\iff \quad x \leq \frac{1}{n} \qquad (x \geq 0)$$

Dunque

$$\sup_{x \geq 0} |g_n(x)| = \max_{x \geq 0} |g_n(x)| = g_n\left(\frac{1}{n}\right)$$

dove è

$$g_n\left(\frac{1}{n}\right) = \left[\frac{x}{1+n^2x^2}\right]_{x=\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{\frac{1}{n}}{1+1} = \frac{1}{2n}$$

Dunque

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$$

Conclusione: Per confronto $(|f_n| \leq |g_n|)$

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}} 0 \quad \text{uniformemente su tutto } \mathbb{R}$$

$\square$

ES. 2 Studiare la convergenza puntuale e uniforme della succ. di funz.

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\log\left(x^{2n} + n^{2x}\right).$$

$x \in \mathbb{R}$

$n \in \mathbb{N}$

Soluzione.

Limite puntuale

1° Caso: $x^2 \leq 1$. Allora

$$\frac{1}{n}\log\left(n^{2x}\right) \leq \frac{1}{n}\log\left(\underbrace{x^{2n}}_{\substack{\leq 1 \\ \geq 0}} + n^{2x}\right) \leq \frac{1}{n}\log\left(1+n^{2x}\right)$$

$$\frac{1}{n}\log\left(n^{2x}\right) = \frac{2x}{n}\log n \geq \boxed{-\frac{2}{n}\log n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad x \geq -1$$

$$\frac{1}{n}\log\left(1+n^{2x}\right) \underset{x\leq 1}{\leq} \frac{1}{n}\log\left(1+n^2\right) \leq \frac{1}{n}\log\left(2^2 n^2\right) = \boxed{\frac{2}{n}\log(2n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Per confronto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log\left(x^{2n} + n^{2x}\right) = 0 \quad \forall x \in [-1,1]$$

Siccome le ultime fratte sono moltip. da $x \in [-1, 1]$, c'è anche conv. uniforme su $[-1,1]$.

2° Caso $x < -1$. ($\leq$)

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \log\left(x^{2n} \left[1 + \frac{n^{2x}}{x^{2n}} \right] \right)$$

$$= \frac{1}{n} \left\{ \log x^{2n} + \log\left(1 + \frac{n^{2x}}{x^{2n}}\right) \right\}$$

$$= \log x^2 + \underbrace{\frac{1}{n} \log\left(1 + \underbrace{\frac{n^{2x}}{x^{2n}}}_{\to 0}\right)}_{\to 0 \quad n \to \infty}$$

Vero $\forall\, x \leq -1$

Conclusione

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \log x^2 \quad \forall\, x \leq -1$$

Studio la conv. unif. su $(-\infty, -1]$.
Mi domando se

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \leq -1} \left| \underbrace{f_n(x) - \log x^2} \right| \stackrel{?}{=} 0$$

$$= g_n(x)$$

Studio $g_n(x)$. (calcolo derivata)

$$g_n'(x) = \left(\frac{1}{n}\log\left(x^{2n} + \underset{\substack{\| \\ (n^2)^x}}{n^{2x}}\right)\right)' - \left(\log x^2\right)'$$

$$= \frac{1}{n}\,\frac{2n\,x^{2n-1} + n^{2x}\cdot\log n^2}{x^{2n}+n^{2x}} - \frac{2}{x}$$

$$= \frac{\cancel{2n\,x^{2n}} + n^{2x}\,x\,\log n^2 - \left(\cancel{2n\,x^{2n}} + 2n\,n^{2x}\right)}{n x\left(x^{2n}+n^{2x}\right)}$$

$$= \frac{n^{2x}\left(2x\log n - 2n\right)}{n x\left(x^{2n}+n^{2x}\right)} = \frac{N}{D}$$

Studio del segno. Abbiamo $x \le -1$

Chiaro che $D \le 0$

$$N \ge 0 \iff \underset{x \le -1}{2x\log n - 2n \ge 0} \quad \underline{\underline{\text{MAI}}}$$

Dunque $N \le 0 \quad \forall\, x \le -1$

Conclusione:

$$g_n'(x) \geq 0 \qquad \forall\, x \leq -1$$

Quindi $g_n \uparrow$ su $(-\infty, -1]$

Siccome $g_n(x) \geq 0 \quad \forall\, x \leq -1$

e poi $g_n \uparrow$ su $(-\infty, -1]$

Dunque

$$\sup_{x \leq -1} |g_n(x)| = \sup_{x \leq -1} g_n(x) = g_n(-1)$$

$$= f_n(-1) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Conclusione $x \leq -1$

$$f_n(x) \underset{n \to \infty}{\rightrightarrows} \log x^2 .$$

<u>3° caso: $x \geq 1$</u>

$$g_n(x) = f_n(x) - \log x^2 \geq 0$$

$$g_n'(x) = \frac{2 n^{2x} \left(x \log n - n \right)}{n x \left(x^{2n} + n^{2x} \right)}$$

Fisso un parametro $M \geq 0$.

Considero solo $x \in [1, M]$

Allora $\exists\, \bar{n} : \forall\, n \geq \bar{n}$ avremo

$$x \log n - n \leq 0$$

$$\forall\, x \in [1, M]$$

Quindi definitivamente in n avremo

$$f_n'(x) \leq 0 \qquad \forall\, x \in [1, M]$$

Quindi

$$\sup_{x \in [1,M]} f_n(x) = g_n(1) = f_n(1) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Quindi $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{[1,M]} \log x^2$

e questo è vero $\forall\, M > 1$

Risposta alla domanda:

È vero che

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \geq 1} \left| f_n(x) - \log x^2 \right| = 0$$

(NO)

<u>ES 3</u> Sia $f_n = g_n h_n$ con

$$g_n(x) = \operatorname{arctg}(nx)$$
$$h_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \qquad x \in \mathbb{R}$$

① Limite punt.

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

② Studi la conv. unif. di

(g_n) e (h_n)

(2) Studi ...
$(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(3) Provare che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge unif. in $\mathbb{R}$.

Soluzione
Limiti Punt.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \arctg(nx) = \begin{cases} \pi/2 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -\pi/2 & x<0 \end{cases}$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot \operatorname{sgn}(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Dunque

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(x)\cdot|x| = \frac{\pi}{2}x$$

Conti corretti $\forall x\in\mathbb{R}$.

(2) Conv. unif. per $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$

$$|h_n(x)-|x|| = \left|\boxed{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}-|x|}\right| =$$

$$\left| h_n(x) - |x| \right| = \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right| =$$

$$= \frac{\cancel{x^2} + \frac{1}{n} - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} \leq$$

$$\leq \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

Da questo deduciamo che

$$h_n \overset{\mathbb{R}}{\underset{n \to \infty}{\rightrightarrows}} |x|$$

Studio $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. $f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx)$

sono tutte

funzioni cont. su $\mathbb{R}$

Abbiamo

$$f_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x)$$

NON È CONT. in $x = 0$

Quindi (f_n) NON può convergere

uniformemente in alcun intorno

di $x = 0$.

Fisso un $\delta > 0$ e studio la CU su $[\delta, +\infty)$:

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sup_{x \geq \delta} \left| g_n(x) - \frac{\pi}{2} \right|}_{} \overset{?}{=} 0$$

$$\shortparallel$$

$$\left| \operatorname{arctg}(nx) - \frac{\pi}{2} \right|$$

$$\shortparallel$$

$$\underbrace{\frac{\pi}{2} - \boxed{\operatorname{arctg}(nx)}}_{} \geq 0$$

è una funzione decrescente su $[\delta, \infty)$

$$\sup_{x \geq \delta} |g_n(x)| = g_n(\delta) = \left| \operatorname{arctg}(\delta n) - \frac{\pi}{2} \right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Quindi $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $\frac{\pi}{2}$ uniformemente su $[\delta, \infty)$ per ogni $\underline{\underline{\delta > 0}}$.

Analog. c'è CU su $(-\infty, -\delta]$.
$\forall \delta > 0$.

(3) $\boxed{\text{ES. per casa}}$